Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Rechenmethoden der Physik SS 2017	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 11

Bitte auf den abzugebenden Lösungen den eigenen Namen und den des Tutors bzw. der Tutorin angeben.
Abgabe: 26. Juni 2017 früh in RdP oder in E5-108. Nicht später!

11.1 Matrizen

a. Die Pauli-Matrizen sind definiert als

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass für die Kommutatoren gilt

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \quad , \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y \quad , \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x \ . \tag{2}$$

b. Bestimmen Sie (zu Fuß) die Determinanten von

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{3}$$

c. Bestimmen Sie irgendwie (zu Fuß, mit Mathematica, Ihrem Taschenrechner) die Determinante von

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

und schreiben Sie dazu, was Sie benutzt haben.

d. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem (auch zu Fuß)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \ . \tag{5}$$

11.2 Inverse

Bestimmen Sie (zu Fuß) die Inverse von

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \; . \tag{6}$$

11.3 Zusatzaufgabe: Levi-Civita-Symbol

Wir betrachten einen dreidimensionalen Vektorraum.

a. Zeigen Sie, dass man mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Komponenten des Kreuzproduktes $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ schreiben kann als

$$c_i \quad = \quad \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \; . \tag{7}$$

b. Zeigen Sie auch, dass die Relation

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \quad = \quad c \left(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right) \tag{8}$$

gilt und bestimmen Sie die Konstante c.

c. Vereinfachen Sie unter Zuhilfenahme von Relation (8) das Produkt $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ (zu einer Ihnen schon bekannten Regel).