Universität Bielefeld	Rechenmethoden der Physik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2017	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 10

Bitte auf den abzugebenden Lösungen den eigenen Namen und den des Tutors bzw. der Tutorin angeben.
Abgabe: 19. Juni 2017 früh in RdP oder in E5-108. Nicht später!

10.1 Vektorrechnung

Hier gibt's leichte Punkte! $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ist die übliche Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

a. Sind die Vektoren $\vec{v}_1 = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z$, $\vec{v}_2 = 2\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3\vec{e}_z$, $\vec{v}_3 = -2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$ linear unabhängig?

b. Seien $\vec{v} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{w} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$. Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

c. Schreiben Sie den Vektor $\vec{v} = \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z$ so um, dass er die Summe zweier Vektoren $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$ ist, wobei $\vec{v}_\parallel$ parallel zu $\vec{w} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ und $\vec{v}_\perp$ orthogonal zu $\vec{w}$ sein soll. Wiederholen Sie, wie man einen Vektor auf eine Achse projiziert; damit bekommen Sie die parallele Komponente.

10.2 Drehungen

a. Repräsentiert die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

eine Drehung? Wenn ja, welche? Schauen Sie sich dazu an, was die Abbildung D mit der ONB $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ macht.

b. Wie lautet die Drehmatrix für eine Drehung um die z-Achse um 45° (entgegen dem Uhrzeigersinn von der positiven z-Achse aus gesehen)?

10.3 Zusatzaufgabe: Eigenschaften von Drehungen

Beweisen Sie unter Verwendung der Eigenschaften von Drehmatrizen

a. dass die Länge von Vektoren bei Drehung des Koordinatensystems unverändert bleibt,

b. dass das innere Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren unter Drehungen invariant ist.

10.4 Zusatzaufgabe: Funktionen sind auch nur Vektoren!

Wir betrachten die hinreichend gutartigen reellen Funktionen $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$. Für den hier betrachteten Fall seien $a = -1$ und $b = 1$.

a. Untersuchen Sie, ob diese Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ einen reellen Vektorraum bilden, d.h., wir betrachten nur Multiplikationen mit reellen Faktoren.

b. Als Skalarprodukt zweier Funktionen f und g auf dem Intervall $[a, b]$ definieren wir

$$(f, g) \quad = \quad \int_a^b \mathrm{d}x \; f(x) \, g(x) \; . \tag{2}$$

Untersuchen Sie, ob das ein gültiges Skalarprodukt ist.

c. Aus dem System von Potenzfunktionen $\{p_n(x) = x^n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ lässt sich mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ein bezüglich des Skalarproduktes (2) orthonormales Polynomsystem bilden. Bestimmen Sie die ersten drei orthonormalen Polynome. Informieren Sie sich dazu, wie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren (auch Gram-Schmidt) funktioniert.

d. Was könnte „hinreichend gutartig“ in diesem Zusammenhang bedeuten?