| | | |
|---|---|---|
| Universität Bielefeld | Rechenmethoden der Physik | Prof. Dr. Jürgen Schnack |
| Fakultät für Physik | SS 2017 | jschnack@uni-bielefeld.de |

# Aufgabenblatt 9

**Bitte auf den abzugebenden Lösungen den eigenen Namen und den des Tutors bzw. der Tutorin angeben.**
**Abgabe: 12. Juni 2017 früh in RdP oder in E5-108. Nicht später!**

## 9.1 Flächen- und Volumenintegrale

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{E} = 4x\vec{e}_x - 2y^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$ sowie ein Zylinder, für dessen Mantel $x^2 + y^2 = 4$ gilt und der von den Ebenen mit $z = 0$ sowie $z = 3$ begrenzt wird.

a. Berechnen Sie $\int_{S_1} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E}$, wobei $S_1$ den Zylindermantel bezeichnet.

b. Berechnen Sie $\int_{S_2} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E}$, wobei $S_2$ aus Boden und Deckel besteht.

c. Berechnen Sie $\int_V \mathrm{d}V \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{E}$ und verifizieren Sie die Gültigkeit des Gaußschen Satzes.

   Anmerkung: Achten Sie darauf, dass die Normalenvektoren nach außen zeigen.

d. Das Vektorfeld von $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3}$ ist divergenzfrei, es sollte also keine Quellen haben. Bei $r = 0$, wo es nicht definiert ist, könnte aber eine Punktquelle sitzen. Das kann man überprüfen, indem man das Volumenintegral über die Divergenz mit Hilfe des Gaußschen Satzes berechnet. Wählen Sie als Volumen eine Kugel und nutzen Sie die Symmetrie von $\vec{A}$. (Sie haben damit das Feld einer Punktladung verstanden.)

e. Ein Drehkörper hat die $x$-Achse als Drehachse, und die Funktion $f(x) = 1/x$ definiert die Oberfläche. Es gilt $x \in [1, \infty)$. Zeigen Sie, dass das Volumen endlich und die Oberfläche unbeschränkt ist.

## 9.2 Zykloide

Ein Rad mit Radius $R$ liege so in der $xy$-Ebene, dass sich der Fußpunkt im Ursprung befindet und der Mittelpunkt bei $(0, R)^T$. Das Rad rolle jetzt einmal komplett entlang $x$ ab. Die Kurve, die der Punkt auf dem Rad beschreibt, der anfänglich im Ursprung lag, nennt man Zykloide. Diese Kurve hängt nicht von der Winkelgeschwindigkeit der Bewegung ab, so dass man diese als konstant wählen kann.

a. Machen Sie sich eine Skizze.

b. Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ der Zykloide.

c. Bestimmen Sie die Länge des durchlaufenen Zykloidenstückes.

## 9.3 Schwerpunkt und Trägheitsmoment einer Masse

Der Schwerpunkt $\vec{R}$ einer Masse mit der räumlich verteilten Dichte $\rho(\vec{r})$ ist

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int_V \mathrm{d}V\ \vec{r}\rho(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad M = \int_V \mathrm{d}^3r\ \rho(\vec{r})\ . \tag{1}$$

Dabei ist $V$ das (geeignet zu wählende) Volumen.
Berechnen Sie den Schwerpunkt einer zylinderförmigen Scheibe der Dicke $d = 1$ cm, deren Symmetrieachse von der $z$-Achse gebildet wird und deren Unterseite einen Abstand von 3 cm von der $xy$-Ebene hat. Der Radius der Scheibe sei $r_0 = 5$ cm. Die Dichte falle entsprechend der Funktion $\rho(\vec{r}) = 27\ \mathrm{g/cm}^4(2r_0 - r_s)$ linear nach außen ab. Hierbei bezeichnet $r_s$ den senkrechten Abstand des Volumenelements $\mathrm{d}V$ zur Symmetrieachse der Scheibe.
Das Trägheitsmoment bezüglich einer bestimmten Drehachse berechnet sich nach

$$I = \int_V \mathrm{d}V\ r_\perp^2 \rho(\vec{r})\ . \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet $r_\perp$ den senkrechten Abstand des Volumenelements $\mathrm{d}V$ zur Drehachse. Berechnen Sie das Trägheitsmoment für den Fall, dass die Symmetrieachse auch die Drehachse ist.

## 9.4 Zusatzaufgabe: Gaußscher Satz

Ein Heißluftballonfahrer benutzt einen Ballon in Form einer großen Milchkuh mit einem Volumen von $V_{\text{Ballon}} = 5000\text{m}^3$. Er schwebt in der neutral geschichteten Troposphäre. Neutrale Schichtung bedeutet, dass die Dichte $\rho$ und die absolute Temperatur $T$ wie folgt von der Höhe $z$ über dem Erdboden abhängen:

$$T(z) = T_0\,(1 - z/L) \tag{3}$$

$$\rho(z) = \rho_0(1 - z/L)^{2.5}\ , \text{ mit } \quad \rho_0 = \frac{m\,p_0}{k_B T_0} \tag{4}$$

und $L = 29.83$ km. Dabei ist $k_B \approx 1.3805 \cdot 10^{-23}$ J/K die Boltzmannkonstante und $m = 28.84/(6.023 \cdot 10^{26})$kg die mittlere Masse eines Luftmoleküls. Ballonhülle und Fracht haben zusammen die Masse $M_{\text{Last}} = 500$ kg. Es sei $p_0 = 1000$ Hektopascal und $T_0 = 290$ K. In welcher Höhe $z_0$ schwebt der Ballon, wenn die Ballontemperatur auf 10% über der Umgebungstemperatur (in Kelvin) gehalten wird?

**Anleitung:** $z_0$ wird als mittlere $z$-Koordinate des Ballons durch folgende Gleichung

$$\rho(z_0) \ =: \ \frac{1}{V_{\text{Ballon}}} \int_{\text{Ballon}} \text{d}V_{\vec{r}}\ \rho(z) \tag{5}$$

definiert. Auf ein nach außen gerichtetes Flächenelement $\text{d}\vec{A}_{\vec{r}}$ der Ballonhülle wirkt die Kraft $-p(z)\text{d}\vec{A}_{\vec{r}}$, die durch den Luftdruck $p = p(z)$ verursacht wird. Die resultierende Gesamtkraft (Auftrieb) kann man durch $z_0$ ausdrücken, wenn man den Gaußschen Satz (für skalare Felder) und die hydrostatische Grundgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g \tag{6}$$

mit $g = const$ benutzt. Diese Auftriebskraft muß gerade das Gesamtgewicht von Ballonhülle, Gasinhalt und Fracht – also

$$-g\left(M_{\text{Last}} + \int \text{d}V_{\vec{r}}\ \rho_{\text{Ballon}}\right) \cdot \vec{e}_z \tag{7}$$

kompensieren. Man kann die ideale Gasgleichung

$$\rho_{\text{Ballon}} = \frac{mp(z)}{k_B T_{\text{Ballon}}} = \rho(z)\frac{T(z)}{T_{\text{Ballon}}} \tag{8}$$

verwenden. Mit (4) hat man dann die Bestimmungsgleichung für $z_0$.
**Konkret:**

a. Auftrieb berechnen

b. Gewichtskraft berechnen, dazu (8) verwenden mit $\frac{T(z)}{T_{\text{Ballon}}} = \frac{1}{1{,}1}$

c. Summe der beiden Kräfte soll Null sein, gibt $\rho(z_0)$ als Funktion von $V_{\text{Ballon}}$ und $M_{\text{Last}}$

d. Ergebnis mit (4) nach $z_0$ umstellen

Der Gag an dieser Aufgabe ist die Berechnung des Auftriebes. Die Form des Ballons spielt keine Rolle.