Universität Bielefeld	Rechenmethoden der Physik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2017	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 8

Bitte auf den abzugebenden Lösungen den eigenen Namen und den des Tutors bzw. der Tutorin angeben.
Abgabe: 6. Juni 2017 früh in der EP 1 oder in E5-108. Nicht später!

8.1 Kurvenintegrale

a. Das Vektorfeld $\vec{A}$ sei gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{r}) \quad = \quad \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y \\ -9xy \\ 8xz^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Berechnen Sie

$$W \quad = \quad \int_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{2}$$

für $C_1 : \vec{r} = (t, t, t)^T, t_A = 0, t_B = 1$ und $C_2 : \vec{r} = (t, t^2, t^4)^T, t_A = 0, t_B = 1$.

b. Eine Schraubenlinie sei gegeben durch

$$\vec{r}(\phi) \quad = \quad \begin{pmatrix} a\cos(\phi) \\ a\sin(\phi) \\ b\ \phi \end{pmatrix} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \ . \tag{3}$$

Berechnen Sie die Länge der Bahnkurve für $\phi_A = 0, \phi_B = 2\pi$ formelmäßig. Nutzen Sie ruhig eine Integraltafel o.ä..

c. Berechnen Sie die Rotation von

$$\vec{A}(\vec{r}) \quad = \quad \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)^T \ . \tag{4}$$

Berechnen Sie ebenfalls das geschlossene Kurvenintegral

$$W \quad = \quad \oint \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{5}$$

entlang des Einheitskreises in der x-y–Ebene (aus positiver z–Richtung gesehen entgegen dem Uhrzeigersinn).

d. **Zusatzaufgabe:** Als Rotation von (4) sollten Sie Null erhalten haben. Dann könnte $\vec{A}(\vec{r})$ ein Gradientenfeld sein und das Integral über den geschlossenen Weg sollte Null sein. Ist es aber nicht. Woran könnte das liegen?

8.2 Zusatzaufgabe: Nützliche Relationen

Ich möchte, dass Sie diese Aufgabe lösen und sich schöne Zusatzpunkte verdienen! ;-)

$\phi(\vec{x})$ sei zweifach stetig differenzierbar. Beweisen Sie

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \, \phi(\vec{x}) \right) \quad = \quad 0 \tag{6}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{A}(\vec{x}) \right) \quad = \quad 0 \tag{7}$$

für zweifach stetig differenzierbare $\vec{A}(\vec{x})$.

8.3 Zusatzaufgabe: Gradientenfelder

In der Physik kommen bestimmte Funktionen immer wieder vor. Untersuchen Sie folgende wirbelfreie Vektorfunktionen. Nutzen Sie dabei Ergebnisse vorangegangener Zettel.

a.

$$\vec{A}_1(\vec{r}) \quad = \quad \alpha \vec{r} \; , \qquad \alpha = \text{const.} \tag{8}$$

Kann man $\vec{A}_1$ als Gradientenfeld darstellen? Wenn ja, wie lautet das zugehörige skalare Feld?

b.

$$\vec{A}_2(\vec{r}) \quad = \quad \frac{\alpha \vec{r}}{r^3} \; , \qquad \alpha = \text{const.} \tag{9}$$

Kann man $\vec{A}_2$ als Gradientenfeld darstellen? Wenn ja, wie lautet das zugehörige skalare Feld?

c.

$$\vec{A}_4(\vec{r}) \quad = \quad \rho(r) \, \frac{\vec{r}}{r} \tag{10}$$

Die Bezeichnung $\rho(r)$ meint, dass dieses skalare Feld isotrop (rotationssymmetrisch) ist. Kann man $\vec{A}_4$ als Gradientenfeld darstellen? Wenn ja, wie lautet das zugehörige skalare Feld?

Auf diesem Zettel gibt es mehrere einfache Zusatzaufgaben. Nutzen Sie diese, um Ihr Punktekonto zu verbessern!