Universität Bielefeld	Rechenmethoden der Physik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2017	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 7

Bitte auf den abzugebenden Lösungen den eigenen Namen und den des Tutors bzw. der Tutorin angeben.
Abgabe: 29. Mai 2017 früh in der Vorlesung oder in E5-108.

7.1 Gradient und Divergenz

Bestimmen Sie den Gradienten von

a. $V(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2$

b. $V(\vec{x}) = \frac{1}{r}$ mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und $r > 0$

c. $V(\vec{x}) = \frac{1}{r^2}$ mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und $r > 0$

d. $V(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}$. Hierbei wird der Betrag über den Pythagoras berechnet.

e. $V(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}, \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$

f. $V(\vec{x}) = xy, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

Bestimmen Sie die Divergenz von

g. $\vec{E}(\vec{x}) = \alpha\vec{x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

h. $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r^3}$ mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und $r > 0$

i. $\vec{a} \cdot \vec{x}, \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$

j. $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}, \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$

k. $\vec{E}(\vec{r}) = r^n\vec{r}$. Hierbei ist $\vec{r}$ das Gleiche wie $\vec{x}$; $\vec{r}$ wird gern in der E-Dynamik verwendet.

Bestimmen Sie die Rotation von

l. $\vec{j}(\vec{x}) = \alpha\vec{x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

m. $\vec{j}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}, \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$

n. $\vec{j}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

o. $\vec{j}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times (\vec{a} \times \vec{x}), \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$

7.2 Quellen- und Wirbelfreiheit

Für welche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist die Strömung

$$\vec{j}(\vec{x}) \;=\; (\alpha x + (\beta + \gamma)y, (\beta - \gamma)x + \alpha y, 0)^T \;. \tag{1}$$

a. quellenfrei?

b. wirbelfrei?

c. Skizzieren Sie das Vektorfeld für $\alpha, \beta > 0$ sowie $\gamma = 0$.

7.3 Rotationsellipsoid

Gegeben sei ein länglicher Atomkern in Form eines Rotationsellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \;=\; 1 \tag{2}$$

mit $a < b \in \mathbb{R}$

a. Bestimmen Sie den Normalenvektor auf dem Rotationsellipsoiden.

b. In welche Richtung zeigt der Normalenvektor?

7.4 Taylor-Reihe

Entwickeln Sie

$$\phi(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \tag{3}$$

in eine Taylor-Reihe für $|\vec{a}| \ll |\vec{x}|$ bis zur zweiten Ordnung in $\vec{x}$. Schauen Sie sich dazu die Aufzeichungen zum Verschiebeoperator an.
In Elektrodynamik werden Sie solche Entwicklungen wiedersehen. Dann heißt typischerweise $\vec{x}$ wieder mal $\vec{r}$ und $\vec{a}$ wird $\vec{r}_0$ genannt. $|\vec{r}_0| \ll |\vec{r}|$ bedeutet dann, dass wir uns für das Fernfeld interessieren.