Universität Bielefeld	Rechenmethoden der Physik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2017	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 6

Bitte auf den abzugebenden Lösungen den eigenen Namen und den des Tutors bzw. der Tutorin angeben.
Abgabe: 22. Mai 2017 früh in der Vorlesung oder in E5-108.

6.1 Komplexe Zahlen

a. Bestimmen Sie den Realteil von $z_1 = 2 + 3i$.

b. Bestimmen Sie den Imaginärteil von $z_2 = 4 - 2i$.

c. Bestimmen Sie den Realteil von $z_1 \cdot z_2$.

d. Bestimmen Sie den Imaginärteil von $z_1 \cdot z_2$.

e. Bestimmen Sie den Betrag von $z_1 \cdot z_2$.

Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen gilt:

f. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

g. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

h. $|e^z|^2 = e^{2\mathrm{Re}(z)}$

Stellen Sie die folgenden Ausdrücke als $a + ib$ dar:

i. $\frac{1+i}{1-i}$

j. $\mathrm{Re}(\frac{1}{1+i\sinh(x)})$, $x \in \mathbb{R}$

k. $\tanh(ix)$, $x \in \mathbb{R}$

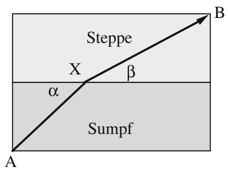
Lösen Sie:

l. Welche Lösungen hat $z^{27} = 1$?

m. Zeigen Sie, dass die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit $e^{i\pi/2}$ einer Drehung um 90° in der Gaußschen Zahlenebene entspricht.

n. Wie folgen aus $e^{2i\alpha} = e^{i\alpha}e^{i\alpha}$ die Additionstheoreme für $\cos(2\alpha)$ und $\sin(2\alpha)$?

6.2 Extremwertaufgabe

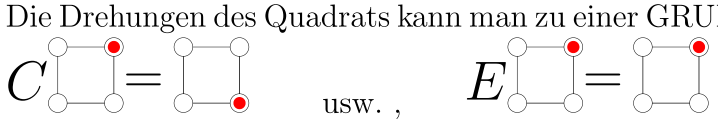


Ein Reiter reitet von A nach B und durchquert dabei Sumpf und Steppe. Die Koordinaten lauten $A = (0, 0)$ und $B = (1000, 1000)$. Der Sumpf erstreckt sich im Gebiet mit $y < 500$, die Steppe im Gebiet mit $y > 500$. Im Sumpf reitet der Reiter mit der konstanten Geschwindigkeit v_a, in der Steppe mit der konstanten Geschwindigkeit $v_b > v_a$.
Der Reiter hat es aus den bekannten Gründen („Wer reitet so spät durch Nacht und Wind?“) eilig und möchte folglich die Zeit minimieren. Auf welchem Weg gelingt ihm dies? Zeigen Sie, dass der Weg mit dem Brechungsgesetz der Optik (auch Snelliussches Brechungsgesetz) übereinstimmt.

Anmerkung: Die Extremwertaufgabe ist ein Spezialfall des Fermatschen Prinzips, das in der Optik besagt, dass ein Lichtstrahl durch ein Medium den Weg nimmt, der die Laufzeit minimiert. Daraus kann man das optische Brechungsgesetz ableiten.
In der Elektrodynamik kann man das Gesetz ebenso aus den Stetigkeitsbedingungen elektromagnetischer Felder an Grenzflächen ableiten. Diese wiederum haben etwas damit zu tun, dass der Raum gewisse Symmetrien aufweist. Dazu aber mehr in *Theoretischer Physik I*.

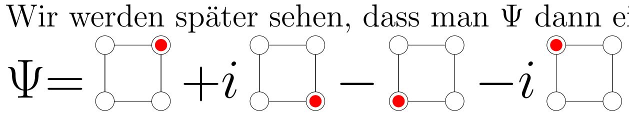
6.3 Zusatzaufgabe: Die Punktgruppe C_4

Die Drehungen des Quadrats kann man zu einer GRUPPE zusammenfassen: $\{E, C, C^2, C^3\}$.



C dreht dabei das Quadrat, auf das es angewendet wird, um eine Vierteldrehung im Uhrzeigersinn weiter.

Zeigen Sie, dass die Anwendung von C den Zustand Ψ bis auf einen Vorfaktor reproduziert. Wir werden später sehen, dass man Ψ dann einen Eigenzustand von C nennt.



Wie lautet der Vorfaktor?