Universität Bielefeld	Rechenmethoden der Physik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2017	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 5

Bitte auf den abzugebenden Lösungen den eigenen Namen und den des Tutors bzw. der Tutorin angeben.
Abgabe: 15. Mai 2017 früh in der Vorlesung oder in E5-108.

5.1 Taylor-Reihen

Entwickeln Sie in eine Taylor-Reihe (mit ein paar sichtbaren Zwischenschritten)

a. $f(x) = e^x \quad , \quad x_0 = 0$

b. $f(x) = \sin(x) \quad , \quad x_0 = 0$

c. $f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x_0 = 1$

d. $f(x) = \sinh(x) \quad , \quad x_0 = 0$

Entwickeln Sie in eine Taylor-Reihe bis zum dritten nicht verschwindenden Term (mit ein paar sichtbaren Zwischenschritten)

a. $f(x) = \sin^2(x) \quad , \quad x_0 = 0$

b. $f(x) = \ln(x) \quad , \quad x_0 = 1$

c. $f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad , \quad x_0 = 0$

Argumentieren Sie, wie groß das Konvergenzgebiet der Taylor-Reihen zu den folgenden Funktionen sein könnte.

a. $f(x) = \sin^2(x) \quad , \quad x_0 = 0$

b. $f(x) = \sinh(x) \quad , \quad x_0 = 0$

c. $f(x) = \ln(x) \quad , \quad x_0 = 1$

d. $f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad , \quad x_0 = 0$

5.2 x^4–Potential

Die potentielle Energie eines fiktiven Teilchens einer fiktiven Theorie aus der Hochenergiephysik hat die folgende typische Abhängigkeit von x

$$V(x) = \alpha x^2 + \beta x^4 \; . \tag{1}$$

Dabei ist $\alpha < 0$ und $\beta > 0$.

a. Bestimmen Sie die beiden äquivalenten Minima von V oder schauen Sie diese in Ihren alten Übungen nach.

b. Entwickeln Sie das Potential in eine Taylor-Reihe bis zur dritten Ordnung um das Minimum bei $x_0 > 0$. Dritte Ordnung bedeutet $k = 0, 1, 2, 3$ in der Taylor-Entwicklung.

c. Warum gibt es keine fünfte Ordnung?

d. Wie groß ist das Konvergenzgebiet der Taylor-Reihe?

e. Wie groß ist das Konvergenzgebiet ganz allgemein für die Taylor-Reihe von Polynomen?

5.3 Zusatzaufgabe: Taylor-Approximationen für ln

Stellen Sie die Taylor-Reihen um $x_0 = 1$ für die Funktion

$$f(x) = \ln(x) \tag{2}$$

für die Ordnungen $n = 0, 1, 2, 3$ auf dem Intervall $(0, 2)$ graphisch dar.
Wenn Sie Taylor-Reihen um $x_0 = 1$ für die Ordnungen $n = 0, \ldots 20$ auf dem Intervall $(0, 5)$ graphisch darstellen, können Sie sogar erahnen, wie groß das Konvergenzgebiet ist. Dieser Stoff wird in Funktionentheorie behandelt.