

Aufgabenblatt 4

Bitte auf den abzugebenden Lösungen den eigenen Namen und den des Tutors bzw. der Tutorin angeben.

Abgabe: 8. Mai 2017 früh in der Vorlesung oder in E5-108.

4.1 Folgen und Reihen

Konvergiert die Folge, warum und wenn ja, wogegen?

a.

$$a_n = (-1)^n \quad (1)$$

b.

$$a_n = 9(-0.1)^n \quad (2)$$

c.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3)$$

d.

$$a_n = c^{\frac{1}{n}}, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (4)$$

Konvergiert die Reihe, warum und wenn ja, wogegen?

a.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (5)$$

b.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (6)$$

c.

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n, \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad (7)$$

4.2 Höhere Ableitungen

- Berechnen Sie die ersten fünf Ableitungen von $\sin(x)$. Geben Sie eine allgemeine Formel für die n -te Ableitung an.
- Berechnen Sie die ersten fünf Ableitungen von $\cos(x)$. Geben Sie eine allgemeine Formel für die n -te Ableitung an.
- Mit

$$\frac{d^n}{dx^n} \quad (8)$$

sei die n -te Ableitung bezeichnet. Nullte Ableitung bedeutet, dass nicht abgeleitet wird, also

$$\frac{d^0}{dx^0} = 1 \quad \text{bzw.} \quad (9)$$

$$\frac{d^0}{dx^0} f(x) = f(x) . \quad (10)$$

Schreiben Sie die ersten sechs Terme der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\frac{d^n}{dx^n} \cos(x) \Big|_{x=0} \right) \quad (11)$$

auf.

- Schreiben Sie die ersten sechs Terme der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^x \Big|_{x=0} \right) \quad (12)$$

auf. Gegen welchen Grenzwert wird diese Reihe Ihrer Meinung nach für $x = 1$ gehen?

4.3 Zusatzaufgabe: Feigenbaum-Attraktor

Untersuchen Sie die Folge

$$x_0 = 0.5 \quad , \quad x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (13)$$

für unterschiedliche a numerisch. Schreiben Sie dazu ein kleines Programm mit einem Werkzeug Ihrer Wahl, z.B. Mathematica. Berechnen Sie für ein gegebenes a die ersten 300 Folgenglieder und tragen Sie dann x_{201} bis x_{300} in einer Graphik als Punkte über a auf. Wiederholen Sie dies für $2.5 < a < 4.0$ z.B. im Abstand von $\Delta a = 0.01$ und tragen Sie die Punkte in die Graphik ein.

Wie würden Sie die entstandene Figur charakterisieren?