

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Rechenmethoden der Physik SS 2017	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	--------------------------------------	---

Aufgabenblatt 3

Bitte auf den abzugebenden Lösungen den eigenen Namen und den des Tutors bzw. der Tutorin angeben.

Abgabe: 2. Mai 2017 früh in der Vorlesung Einführung 2 oder in E5-108.

3.1 Ableitungen und Integrale

Geben Sie die ersten Ableitungen für die folgenden Funktionen an. Bitte schreiben Sie auch einige Zwischenschritte auf, damit wir erkennen, dass Sie es verstanden haben bzw. wo Fehler entstanden sind.

- $f(x) = \tan x$
- $g(h) = \sin(\cos(h))$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x^3}} ; x \in \mathbb{R}^+$
- $f(t) = \sqrt{-t}$ für $t \in \mathbb{R}^-$
- $f(x) = |x|$
- $f(x) = x^x ; x \in \mathbb{R}^+$

Berechnen Sie mit Zwischenschritten

- $\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r e^{-\frac{r}{a}}$
- $\frac{\partial}{\partial y} g(x, y)$ für $g(x, y) = x \sin(2y^2) + x y e^{-y^2}$
- $\frac{\partial}{\partial q} L(q, \dot{q}, t)$ für $L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$
- $\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q}, t)$ für $L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$

Integrieren Sie mit Zwischenschritten

- $\int_0^\infty dx x e^{-x}$
- $\int_0^{2\pi} dt \sin(t)$
- $\int_0^{2\pi} dt \sin^2(t)$
- $\int_0^1 dh \sqrt{1-h^2}$
- $\int_0^\infty dx x e^{-x^2}$

3.2 Partielle Ableitungen

Das skalare Feld

$$\phi(x, y, z) = \frac{e^{-\alpha r}}{r} \text{ mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1)$$

beschreibt zum Beispiel das abgeschirmte elektrische Potential einer Ladung in einem Plasma.

- Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} \phi$, $\frac{\partial}{\partial y} \phi$ und $\frac{\partial}{\partial z} \phi$ für $r > 0$.
- Berechnen Sie ebenfalls das skalare Feld

$$\Psi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2)$$

für $r > 0$.

3.3 Zusatzaufgabe: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Wir betrachten die Ausbreitung skalarer Wellen in dispersiven Medien. Arbeiten Sie im folgenden mit natürlichen Einheiten, d.h., setzen Sie für die Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 1$ (Das ist etwa ab dem 5. Semester erlaubt!).

Dispersive Medien sind dadurch gekennzeichnet, dass der Brechungsindex n von der Wellenzahl k abhängt. Im Folgenden soll der Brechungsindex wie folgt von k abhängen

$$n(k) = 1.2 + \eta (k - k_0) \exp\left(-\frac{(k - k_0)^2}{4}\right), \quad k_0 = 5. \quad (3)$$

Den Bereich, in dem der Brechungsindex mit k wächst, bezeichnet man als Bereich normaler Dispersion, den Bereich, in dem der Brechungsindex mit k abnimmt, als Bereich anormaler Dispersion. $\eta > 0$ ist hier eine Materialkonstante.

- Die Kreisfrequenz $\omega(k)$ berechnet sich zu

$$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)}. \quad (4)$$

Daraus können Sie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bestimmen

$$v_p(k) = \frac{\omega(k)}{k}, \quad v_g(k) = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}. \quad (5)$$

Berechnen Sie die Gruppengeschwindigkeit.

- Stellen Sie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit graphisch dar für die Fälle: $\eta = 0.1$, $\eta = 0.245$, $\eta = 0.35$.

Sollte eine der Geschwindigkeiten größer als Eins werden, heißt das, dass Sie Überlichtgeschwindigkeit erreicht haben! Das ist möglich. Fragen Sie dazu **nicht** Ihren Tutor, sondern eher Prof. Huser oder Prof. Pfeiffer oder lesen Sie Artikel über die tollen Arbeiten von Frau Lene Vestergaard Hau (<https://www.physics.harvard.edu/people/facpages/hau>).