Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Rechenmethoden der Physik SS 2017	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Bitte jede Aufgabe (1, 2, 3, ...) auf einem neuen Blatt. Name, Vorname und Matrikelnummer jeweils nicht vergessen.

1 Integrieren und Differenzieren

a. Die Zustandssumme lautet

$$Z(T,L) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\; e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; e^{-\frac{m\omega^2x^2}{2k_BT}} \;. \tag{1}$$

Dabei ist k_B die Boltzmann-Konstante. Berechnen Sie Z (2 P.).

b. Die innere Energie U ergibt sich aus Z als

$$U(T,L) \;=\; k_BT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln\left(Z(T,L)\right) \;. \tag{2}$$

Berechnen Sie U (2 P.).

2 Taylor-Reihen

Entwickeln Sie in eine Taylor-Reihe bis zum dritten nicht verschwindenden Term (mit ein paar sichtbaren Zwischenschritten)

a. $f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x_0 = 1$ (6 P.)

b. $f(x) = \sin^2(x) \quad , \quad x_0 = 0$ (6 P.)

3 Komplexe Zahlen

a. Bestimmen Sie den Imaginärteil von $z_1 \cdot z_2$ (2 P.).

b. Zeigen Sie, dass $|e^z|^2 = e^{2\mathrm{Re}(z)}$ (2 P.).

c. Welche Lösungen hat $z^N = 1$, für $N \in \mathbb{N}$ (2 P.)?

4 Gradient und Divergenz

a. Bestimmen Sie den Gradienten von $V(\vec{x}) = x^4 + y^4 + z^4$ (4 P.).

b. Bestimmen Sie die Divergenz von $\vec{E}(\vec{x}) = r^n \vec{x}$ mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und $r > 0$ (6 P.).

c. Bestimmen Sie die Rotation von $\vec{j}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}, \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ (6 P.)

5 Quellen- und Wirbelfreiheit

Für welche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist die Strömung

$$\vec{j}(\vec{x}) \quad = \quad (\alpha x + (\beta + \gamma) y, (\beta - \gamma) x + \alpha y, 0)^T \quad . \tag{3}$$

a. quellenfrei (6 P.)?

b. wirbelfrei (6 P.)?

6 Flächen- und Volumenintegrale

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{E} = 4x\vec{e}_x - 2y^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$ sowie ein Zylinder, für dessen Mantel $x^2 + y^2 = 4$ gilt und der von den Ebenen mit $z = 0$ sowie $z = 3$ begrenzt wird.

a. Berechnen Sie $\int_{S_1} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E}$, wobei S_1 den Zylindermantel bezeichnet (5 P.).

b. Berechnen Sie $\int_{S_2} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E}$, wobei S_2 aus Boden und Deckel besteht (5 P.).

c. Berechnen Sie $\int_V \mathrm{d}V \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{E}$ und verifizieren Sie die Gültigkeit des Gaußschen Satzes (4 P.).

   Anmerkung: Achten Sie darauf, dass die Normalenvektoren nach außen zeigen.

7 Fouriertransformation der Gauß-Funktion (4 P.)

Berechnen Sie die (symmetrische) Fouriertransformation von

$$G(k) \quad = \quad \exp\left[-\alpha k^2\right] \quad . \tag{4}$$

8 Eigenwertprobleme

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Alle folgenden Rechnungen sollen „zu Fuß“ mit Zwischenschritten durchgeführt werden.

a. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A (4 P.).

b. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A und normieren Sie diese (4 P.).

c. Bestimmen Sie die orthogonale Transformationsmatrix R, mit der A in die Diagonaldarstellung A_D,

$$A_D = RAR^T \tag{6}$$

überführt werden kann (4 P.).

9 Fundamentale Differentialgleichungen der Physik

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an. Geben Sie ebenfalls die Anzahl der Anfangsbedingungen sowie je ein physikalisches Beispiel an.

a. (3 P.)

$$\ddot{z} = g . \tag{7}$$

b. (3 P.)

$$\ddot{\phi} = -\omega^2 \phi . \tag{8}$$

ω und g sind reelle positive Konstanten.

10 Kurvenintegrale (5 P.)

Das Vektorfeld $\vec{A}$ sei gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y \\ -9xy \\ 8xz^2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Berechnen Sie

$$W = \int_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{10}$$

für $C_1 : \vec{r} = (t, t, t)^T, t_A = 0, t_B = 1$ und $C_2 : \vec{r} = (t, t^2, t^4)^T, t_A = 0, t_B = 1$.

Es können 91 Punkte erreicht werden.

Sie haben bestanden, wenn Sie mehr als 45 Punkte erreichen. Viel Erfolg.