Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Rechenmethoden der Physik SS 2017	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Bitte jede Aufgabe (1, 2, 3, . . .) auf einem neuen Blatt. Name, Vorname und Matrikelnummer jeweils nicht vergessen.

1 Integrieren und Differenzieren

a. Die Zustandssumme lautet

$$Z(T, L) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \; e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}} \cdot \int_0^L \mathrm{d}x \; . \tag{1}$$

Dabei ist k_B die Boltzmann-Konstante. Berechnen Sie Z (2 P.).

b. Die innere Energie U ergibt sich aus Z als

$$U(T, L) = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln\left(Z(T, L)\right) \; . \tag{2}$$

Berechnen Sie U (2 P.).

2 Taylor-Reihen

Entwickeln Sie in eine Taylor-Reihe bis zum dritten nicht verschwindenden Term (mit ein paar sichtbaren Zwischenschritten)

a. $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$ (6 P.)

b. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $x_0 = 0$ (6 P.)

3 Komplexe Zahlen

a. Bestimmen Sie den Realteil von $z_1 \cdot z_2$ (2 P.).

b. Zeigen Sie, dass $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (2 P.).

c. Welche Lösungen hat $z^{27} = 1$ (2 P.)?

4 Gradient und Divergenz

a. Bestimmen Sie den Gradienten von $V(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2$ (4 P.).

b. Bestimmen Sie die Divergenz von $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r^3}$ mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und $r > 0$ (6 P.).

c. Bestimmen Sie die Rotation von $\vec{j}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}, \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ (6 P.)

5 Nützliche Relationen

$\phi(\vec{x})$ sei zweifach stetig differenzierbar. Beweisen Sie (6 P.)

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \phi(\vec{x}) \right) = 0 \tag{3}$$

und (6 P.)

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{A}(\vec{x}) \right) = 0 \tag{4}$$

für zweifach stetig differenzierbare $\vec{A}(\vec{x})$.

6 Flächen- und Volumenintegrale

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{E} = 4x\vec{e}_x - 2y^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$ sowie ein Zylinder, für dessen Mantel $x^2 + y^2 = 4$ gilt und der von den Ebenen mit $z = 0$ sowie $z = 3$ begrenzt wird.

a. Berechnen Sie $\int_{S_1} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E}$, wobei S_1 den Zylindermantel bezeichnet (5 P.).

b. Berechnen Sie $\int_{S_2} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E}$, wobei S_2 aus Boden und Deckel besteht (5 P.).

c. Berechnen Sie $\int_V \mathrm{d}V \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{E}$ und verifizieren Sie die Gültigkeit des Gaußschen Satzes (4 P.).

   Anmerkung: Achten Sie darauf, dass die Normalenvektoren nach außen zeigen.

7 Eigenwertprobleme

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Alle folgenden Rechnungen sollen „zu Fuß“ mit Zwischenschritten durchgeführt werden.

a. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A (4 P.).

b. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A und normieren Sie diese (4 P.).

c. Überprüfen Sie die Eigenvektoren auf Orthogonalität (2 P.).

d. Warum müssen diese Eigenvektoren orthogonal sein (2 P.)?

8 Fundamentale Differentialgleichungen der Physik

Geben Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der folgenden Differentialgleichungen an. Geben Sie ebenfalls die Anzahl der Anfangsbedingungen sowie je ein Beispiel für diese an.

a. (3 P.)

$$\ddot{x} = g \; . \tag{6}$$

b. (3 P.)

$$\ddot{x} = -k^2 x \; . \tag{7}$$

k ist eine reelle positive Konstante.

9 Wronski-Determinante (5 P.)

Überprüfen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, ob die folgenden Funktionen linear unabhängig sind

$$e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx} \; . \tag{8}$$

10 Fouriertransformation der Gauß-Funktion (4 P.)

Berechnen Sie die (symmetrische) Fouriertransformation von

$$g(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{a}\right] \; . \tag{9}$$

Es können 91 Punkte erreicht werden.

Sie haben bestanden, wenn Sie mehr als 42 Punkte erreichen. Viel Erfolg.