Universität Bielefeld	Kernphysik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	WS 2016/2017	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 12

12.1 Wiederholung harmonischer Oszillator

Wiederholen Sie die quantenmechanische Beschreibung des harmonischen Oszillators.

a. Wie lauten die Energieeigenwerte des eindimensionalen harmonischen Oszillators?

b. Berechnen Sie die innere Energie $U(T)$ und die Wärmekapazität $C(T)$ für den eindimensionalen harmonischen Oszillator im kanonischen Ensemble.

c. Stellen Sie $U(T)$ und $C(T)$ graphisch dar. Tragen Sie an den Achsen *vernünftige* Größen auf.

d. Wie lauten die Energieeigenwerte, die innere Energie $U(T)$ und die Wärmekapazität $C(T)$ für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator im kanonischen Ensemble?

e. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den entsprechenden klassischen Lösungen.

12.2 Zwei identische Teilchen im Kastenpotential

Zwei identische Teilchen befinden sich in einem eindimensionalen Kastenpotential mit unendlich hohen Potentialwänden

$$V(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad . \tag{1}$$

a. Wie lauten die Energieeigenwerte und die Eigenfunktionen (Ortsdarstellung) für ein Teilchen im Kastenpotential?

b. Formulieren Sie den Hamiltonoperator des Zweiteilchensystems. Warum separieren die Eigenfunktionen in einen Orts- und einen Spinanteil?

c. Bei den beiden Teilchen handele es sich um Fermionen mit Spin $s = 1/2$. Welche Symmetrie muss der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch $S = 1$ beschrieben wird und welche Symmetrie muss der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch $S = 0$ beschrieben wird? Berechnen Sie für beide Fälle die möglichen Energieeigenwerte und Eigenfunktionen.

d. Bei den beiden Teilchen handele es sich nun um Bosonen mit Spin $s = 1$. Welche Symmetrie muss der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch $S = 2, M = 2$ beschrieben wird? Berechnen Sie für diesen Fall die möglichen Energieeigenwerte und Eigenfunktionen.

12.3 Zusatzaufgabe: Fermionen im eindimensionalen harmonischen Oszillator

In der Vorlesung wurde nicht vorgeführt, wie sich die Zustandssumme des kanonischen Ensembles aus N (spinpolarisierten) Fermionen im eindimensionalen harmonischen Oszillator berechnen lässt. Leiten Sie die entsprechende Zustandssumme her.
Tipps:

a. Wie lauten die Eigenzustände für N Teilchen? Überlegen Sie sich das zuerst für zwei Fermionen. Als Ergebnis sollten Sie $\mid n_1, n_2 \rangle_F = \frac{1}{\sqrt{2}} [\, \mid n_1, n_2 \rangle - \mid n_2, n_1 \rangle]$ mit $n_2 > n_1$ erhalten. Warum?
Hierbei sind n_1 und n_2 die Oszillatorquantenzahlen von Fermion 1 und 2 und $\mid n_1, n_2 \rangle_F$ die zugehörige Slaterdeterminante. Wir arbeiten hier also NICHT in der Besetzungszahldarstellung.

b. Wie lauten die Energieeigenwerte für N Teilchen? Überlegen Sie sich das zuerst für zwei Fermionen.

c. Formulieren Sie die Zustandssumme, zuerst wieder für zwei Fermionen. Eigentlich sieht die doch ganz bekannt aus, wenn da nicht dieses Kleiner-Zeichen wäre! Sie können eine Variablentransformation durchführen: setzen Sie $n_2 = n_1 + 1 + n_{12}$ mit $n_{12} = 0, 1, 2, \dots$ und lassen Sie die zweite Summe statt über n_2 über n_{12} laufen. Wenn Sie den Trick durchschaut haben, können Sie das auch für N Fermionen tun.

d. Aus der Zustandssumme können Sie die innere Energie und die Wärmekapazität berechnen. Das Ergebnis können Sie mit der Lösung in H.-J. Schmidt, J. Schnack, *Investigations on finite ideal quantum gases,* Physica A **260** (1998) 479-489, Formeln (17) und (18) vergleichen.

Viel Vergnügen.