Aufgabenblatt 2

2.1 Gaußsches Wellenpaket

Ein Teilchen sei durch die folgende Wellenfunktion beschrieben:

$$\phi(\vec{x}) \quad = \quad \exp\left\{ -\frac{(\vec{x}-\vec{r})^2}{2a} + i\vec{k}\cdot\vec{x} \right\} \ . \tag{1}$$

Dabei sind $a > 0$, $\vec{r}$ und $\vec{k}$ beliebige, aber feste Parameter.

a. Normieren Sie die Wellenfunktion.

b. Berechnen Sie den mittleren Ort $\langle \underset{\sim}{\vec{x}} \rangle$.

c. Berechnen Sie den mittleren Impuls $\langle \underset{\sim}{\vec{p}} \rangle$.

d. Berechnen Sie die Ausdehnung $R = \sqrt{\langle \underset{\sim}{\vec{x}}^2 \rangle - \langle \underset{\sim}{\vec{x}} \rangle^2}$.

2.2 Streuung mit Mathematica

Schreiben Sie ein Mathematica-Notebook, in dem ein klassisches Teilchen an einem zweiten Teilchen, das im Ursprung festgehalten ist, gestreut wird. Verwenden Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und wählen Sie sinnvolle Parameter (Massen, Längen etc.), indem Sie z.B. die Energie durch mc^2 teilen, Geschwindigkeiten als Vielfache von c angeben und Längen in fm nutzen.

a. Verwenden Sie ein Coulomb-Potential und probieren Sie mehrere Stoßparameter aus. Stellen Sie die Bahnen graphisch dar.

b. Addieren Sie zum Coulomb-Potential ein kurzreichweitig abstoßendes Potential und wiederholen Sie Ihre Untersuchungen.

c. Vergleichen Sie beide Graphiken und versuchen Sie die Ausdehnung des streuenden Objektes zu definieren.

2.3 Eindimensionaler Harmonischer Oszillator

Wiederholen oder studieren Sie die Eigenschaften des quantenmechanischen Oszillators in einer Raumdimension.

a. Wie lautet der Hamiltonoperator unter Verwendung von Ort und Impuls sowie unter Verwendung der Auf- und Absteiger?

b. Wie lauten die Energieeigenwerte?

c. Wie lauten die Eigenzustände? Geben Sie die Ortsdarstellung der untersten drei Eigenzustände an.

d. Für den ersten angeregten Zustand des harmonischen Oszillators berechne man die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im klassisch verbotenen Bereich. Das Ergebnis ist eine Zahl.

2.4 Eindimensionales Schalenmodell

Selbstverständlich sind Atomkerne dreidimensionale Objekte. Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden aber einen eindimensionalen Kern. Die vier eindimensionalen Nukleonen werden durch einen simplen Produktzustand beschrieben und befinden sich je zu zweit in den untersten beiden Niveaus eines harmonischen Oszillatorpotentials, für das $\hbar\omega = 16$ MeV ist. Die Masse der Nukleonen sei $m = 939$ MeV/c^2.
Sie können zur Auswertung z.B. ein Programm wie Mathematica benutzen.

a. Stellen Sie die Dichte als Funktion von x dar.

b. Berechnen Sie die Ausdehnung

$$R_{\rm rms}^2 \quad = \quad \langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\underset{\sim}{x}_k - R_{\rm cm} \right)^2 \rangle \ . \tag{2}$$

c. Berechnen Sie die kinetische Energie.