

Aufgabenblatt 11

11.1 Shift-Register-Generator (Hausaufgabe + Email an die Tutoren, Einsendeschluss Mitternacht vor der Übung)

Untersuchen Sie den in der Vorlesung „erfundenen“ Shift-Register-Generator. Er war für Bits x_k wie folgt definiert:

$$x_k = x_{k-p} \text{ XOR } x_{k-p+q}, \quad (1)$$

mit $p = 10$ und $q = 3$. Die Anfangswerte waren

$$x_1, \dots, x_{10} = 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0. \quad (2)$$

1. Schreiben Sie ein Programm in einer Hochsprache Ihrer Wahl (C, Fortran), das weitere Bits entsprechend der Regel (1) generiert. Bei C können Sie dazu den Operator \wedge verwenden, der für zwei Integer bitweise eine XOR-Operation durchführt. Dazu ist es natürlich günstig, jedes Bit durch einen Integer zu repräsentieren.
2. Dieser Generator hat eine Periode, die nicht sehr groß ist. Finden Sie diese heraus.
3. Generieren Sie aus diesen Bits zuerst natürliche Zahlen I_k von 10 Bit Länge und anschließend rationale Zahlen R_k :

$$I_k = \sum_{i=0}^9 x_{k-i} 2^i, \quad k \geq 10; \quad (3)$$

$$R_k = \frac{I_k}{2^{10}}. \quad (4)$$

Welchen Wertebereich haben die erzeugten rationalen Zufallszahlen R_k ?

Tragen Sie die rationalen Zufallszahlen als Paare in zwei Dimensionen graphisch auf. Lassen sich mit dem bloßen Auge Korrelationen erkennen?

4. Erzeugen Sie zum Vergleich Zufallszahlen mit einem professionellen Zufallszahlengenerator, wie z.B. dem „Mersenne-Twister“, und tragen Sie auch diese zum Vergleich in zwei Dimensionen graphisch auf.

Der Source-Code für den Generator befindet sich in der Datei `mt19937ar.c`. Dieser entspricht der auf der Homepage der Erfinder (Matsumoto und Nishimura) frei verfügbaren Version.

11.2 Metropolis-Algorithmus (Hausaufgabe + Vorstellen des Programms in der Übung)

Schauen Sie sich das Mathematica-Notebook zum Ising-Modell in zwei Dimensionen an und versuchen Sie zu verstehen, wie es funktioniert. Vergrößern Sie das System und schauen Sie sich die Magnetisierungskurve an. Können Sie da eine systematische Änderung feststellen?

Formulieren Sie jetzt dieses Notebook um, so dass Sie damit eine eindimensionale Ising-Kette mit einer ferromagnetischen Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn beschreiben. Was fällt Ihnen physikalisch auf?

11.3 Güte eines Zufallszahlengenerators (Hausaufgabe + Bearbeiten in den Übungen)

Erzeugen Sie mit einem selbst geschriebenen Programm Zufallszahlen mit einem professionellen Zufallszahlengenerator Ihrer Wahl, wie z.B. dem „Mersenne-Twister“, gern aber auch mit einem anderen Generator.

Der Source-Code für den Generator befindet sich in der Datei `mt19937ar.c` in `stud.ip`.

1. Untersuchen Sie, ob Ihr Generator eine Gleichverteilung produziert. Diskutieren Sie die Güte.
2. Untersuchen Sie Korrelatoren der folgenden Art:

$$c_k = \langle x_i x_{i-k} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=k+1}^{N+k} x_i x_{i-k} \quad (5)$$

für verschiedene $k = 1, 2, \dots, 5$ und tragen Sie diese graphisch gegen die Zahl der verwendeten Zufallszahlen auf. Gegen welche Werte müssen diese Korrelatoren gehen?