

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Kernphysik WS 2015/2016	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	----------------------------	---

Aufgabenblatt 12

12.1 Wiederholung: Radioaktiver Zerfall

Im Schulbuch „Metzler Physik“ (Schroedel-Verlag, 2007) steht folgender Text:

Radioaktiver Zerfall und Wahrscheinlichkeit Mit den bisherigen Formeln (Zerfallsgesetz, Halbwertszeit; J.S.) wird das Verhalten einer großen Anzahl radioaktiver Kerne beschrieben. Für einen einzelnen Kern ergibt sich eine Zerfallswahrscheinlichkeit: Wenn im Zeitintervall Δt von N Kernen $-\Delta N = -(N_2 - N_1)$ Kerne zerfallen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kern in der Zeit Δt zerfällt, $p = -\Delta N/N$. Dieser Quotient lässt sich mit der mittleren Aktivität in der Zeit Δt verknüpfen:

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N \quad \text{und} \quad p = -\frac{\Delta N}{N} = \lambda \Delta t . \quad (1)$$

Über den Zeitpunkt des Zerfalls eines bestimmten Kerns kann also nichts gesagt werden, er ist unbestimmt. Der radioaktive Zerfall ist ein spontaner stochastischer Prozess, der sich durch keine Einwirkung durch außen wie z.B. Druck und Temperatur beeinflussen lässt. Lediglich die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls in einem Zeitintervall Δt lässt sich mit $p = \lambda \Delta t$ angeben. In der obigen Wahrscheinlichkeit kommt das „Alter“ des Kerns nicht vor: „Atomkerne altern nicht“, d.h. die Zerfallswahrscheinlichkeit wächst nicht mit dem „Alter“ des Kerns oder der Beobachtungszeit. Aus der Formel $p = \lambda \Delta t$ kann geschlossen werden, dass die Zerfallskonstante λ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass der Kern im Einheitszeitintervall zerfällt. ...

Diskutieren Sie diese Darstellung. Was ist gut oder weniger gut dargestellt? Was ist richtig, was eventuell problematisch?

12.2 Schalenmodell für Fermionen

Wir betrachten Nukleonen im Potential eines harmonischen Oszillators der Frequenz ω . Die Nukleonen haben einen Spin von $s = 1/2$, d.h. die Einteilchenzustände lauten $|\vec{n}, m_s\rangle$; dabei benennt \vec{n} einen Eigenzustand des dreidimensionalen Oszillators und m_s die magnetische Quantenzahl.

- a. Nehmen Sie jetzt an, wir suchten den Grundzustand für N Nukleonen. Hierbei gibt es jetzt vier Arten an identischen Fermionen, die sich durch die z -Komponenten von Isospin und Spin charakterisieren lassen: Protonen sowie Neutronen und Spin „rauf und runter“. Berechnen Sie die Energieeigenwerte als Funktion der Anzahl für eine Teilchensorte und Spinpolarisation (bis 200 Teilchen) und stellen Sie diese graphisch dar.
- b. Untersuchen Sie diese Kurve. Differenzieren Sie diese einmal und zweimal numerisch. Was fällt Ihnen auf? Wie könnte man dies interpretieren?

12.3 Dreidimensionales deformiertes Schalenmodell

Ein dreidimensionales Potential des harmonischen Oszillators sei deformiert. Es gelte $\omega_x = \omega_y \neq \omega_z$. Die Deformation werde durch

$$\delta = \frac{\omega_z}{\omega_x} - 1 \quad (2)$$

parametrisiert.

Stellen Sie die tiefliegenden Einteilchenenergieeigenwerte $E(n_x, n_y, n_z)$ für $\delta \in [-0.5, 0.5]$ graphisch dar.

12.4 Eindimensionale Kerne

In dieser Aufgabe soll exemplarisch erarbeitet werden, wie man Eigenzustände von Kernen berechnen kann. Dazu wird ein einfaches Zweiteilchenpotential, wie es aus den Arbeiten von Brink und Boeker bekannt ist, verwendet. Es hat die folgende Form:

$$V(x_{12}) = V_1 \exp \left[- \left(\frac{x_{12}}{r_1} \right)^2 \right] + V_2 \exp \left[- \left(\frac{x_{12}}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Dabei ist x_{12} der Relativabstand. Die Konstanten seien wie folgt gewählt:

$$V_1 = 100 \text{ MeV} \quad (4)$$

$$r_1 = 0.7 \text{ fm} \quad (5)$$

$$V_2 = -50 \text{ MeV} \quad (6)$$

$$r_2 = 1.4 \text{ fm} . \quad (7)$$

Atomkerne sind selbstverständlich dreidimensionale Objekte. Durch die dann auftretenden Volumenintegrale würde die Aufgabe aber numerisch so aufwändig, dass Sie diese nicht mehr lösen könnten. Wer mag, kann es jedoch versuchen. Die folgenden quantenmechanischen Rechnungen sollen in einer Raumdimension ausgeführt werden.

Sie können zur Auswertung z.B. ein Programm wie Mathematica benutzen.

- a. Stellen Sie das Potential graphisch dar.
- b. Berechnen Sie die **klassische** Bindungsenergie für zwei, drei oder vier Teilchen in drei Raumdimensionen.
- c. Überlegen Sie sich, wie man approximative Energieeigenwerte finden kann, wenn man als Einteilchenbasis die Eigenzustände eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit $\hbar\omega = 16 \text{ MeV}$ nutzt. Die Masse der Nukleonen sei $m = 939 \text{ MeV}/c^2$.
- d. Solange man nur unterscheidbare Nukleonen hat, also bei einigen sehr kleinen Kernen, kann man auf die Antisymmetrisierung verzichten und mit Produktzuständen rechnen. Dies ist z.B. beim Deuteron der Fall, das aus einem Proton und einem Neutron besteht sowie beim ^4He -Kern, der aus einem Proton mit Spin up, einem Proton mit Spin down sowie den entsprechenden Neutronen besteht.

Berechnen Sie die approximativen Energieeigenwerte für diese beiden Konfigurationen.

- e. Das Ergebnis wird von der Anzahl der mitgenommenen Einteilchenzustände abhängen. Wieviel, denken Sie, müsste man mitnehmen? Wieviel können Sie auf Ihrem Computer mitnehmen?
- f. Hängt das Ergebnis von ω ab? Was wäre, wenn man alle Einteilchenzustände mitnehmen würde?