Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Symmetrien in der Physik WS 2014/2015	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 12

12.1 Multipolentwicklung: C_{3v}–Symmetrie

Ein System aus drei gleichen Ladungen weise C_{3v}–Symmetrie auf. In der Vorlesung wurde dazu die Multipolentwicklung entsprechend der Einsdarstellung von C_{3v} modifiziert.
Wir hatten zwei Fragen offen gelassen, die mit dieser Aufgabe beantwortet werden sollen.

a. In welche Richtung zeigt die z-Achse?

b. Für $l = 3$ sind die irreduziblen Basisfunktionen der Einsdarstellung von C_{3v} durch $Y_{3,0}$ und $Y_{3,3} - Y_{3,-3}$ gegeben. Zeigen Sie, dass dies stimmt.

12.2 Tight-binding-Modell

Das Hubbard-Modell einer eindimensionalen Kette ist durch den folgenden Hamiltonoperator gegeben

$$\underset{\sim}{H} = -t \sum_{j=1}^{L} \sum_{\sigma=\pm 1/2} \left(\underset{\sim}{c}^\dagger_{j,\sigma} \underset{\sim}{c}_{j+1,\sigma} + \underset{\sim}{c}^\dagger_{j+1,\sigma} \underset{\sim}{c}_{j,\sigma} \right) + U \sum_{j=1}^{L} \underset{\sim}{n}_{j,1/2} \underset{\sim}{n}_{j,-1/2} \ . \tag{1}$$

Dabei sind die $\underset{\sim}{c}^\dagger_{j,\sigma}$ Erzeuger von Fermionen mit Spin 1/2 am Platz j mit m-Quantenzahl $m = \sigma$. $\underset{\sim}{c}_{j,\sigma}$ sind die entsprechenden Vernichter, $\underset{\sim}{n}_{j,\sigma} = \underset{\sim}{c}^\dagger_{j,\sigma} \underset{\sim}{c}_{j,\sigma}$ die Besetzungszahloperatoren. $t, U \in \mathbb{R}$. L ist die Anzahl der Plätze.
Die Erzeuger und Vernichter gehorchen den folgenden Antikommutatorrelationen

$$\left\{ \underset{\sim}{c}^\dagger_{j,\sigma}, \underset{\sim}{c}^\dagger_{j',\sigma'} \right\} = \left\{ \underset{\sim}{c}_{j,\sigma}, \underset{\sim}{c}_{j',\sigma'} \right\} = 0 \tag{2}$$

$$\left\{ \underset{\sim}{c}_{j,\sigma}, \underset{\sim}{c}^\dagger_{j',\sigma'} \right\} = \delta_{jj'} \delta_{\sigma\sigma'} \ . \tag{3}$$

Für $U = 0$ vereinfacht sich der Hamiltonoperator (1) zum Hamiltonoperator des *tight-binding*-Modells. Man könnte diese translationssymmetrischen Hamiltonoperatoren wie gehabt durch Einführung einer Eigenbasis zum Translationsoperator diagonalisieren, im Falle von Einteilchenoperatoren wie dem Hamiltonoperator des *tight-binding*-Modells kann man dies aber durch eine Transformation von $\underset{\sim}{H}$ auf Diagonalform ganz allgemein erreichen. Dazu führt man neue Operatoren

$$\underset{\sim}{d}^\dagger_{k,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=1}^{L} \exp\left[i \frac{2\pi k j}{L} \right] \underset{\sim}{c}^\dagger_{j,\sigma} \ , \quad k = 0, 1, \dots L-1 \ , \tag{4}$$

ein.

a. Wie lautet die Transformation für die Vernichter?

b. Zeigen Sie, dass die kanonischen Vertauschungsrelationen (2) auch für die neuen Erzeuger und Vernichter gelten.

c. Wie lautet die Rücktransformation?

d. Was erhält man für den *tight-binding*-Hamiltonoperator? Wie lauten die Eigenwerte und wie die Eigenzustände?