Universität Bielefeld	Symmetrien in der Physik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	WS 2014/2015	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 9

9.1 Rotationen des Spins

a. Wir betrachten einen einzelnen Spin $\underset{\sim}{\vec{s}}$. Berechnen Sie die Wirkung der folgenden Symmetrieoperation

$$\exp\left\{-i\alpha \underset{\sim}{s}^z\right\}\ \underset{\sim}{\vec{s}}\ \exp\left\{i\alpha \underset{\sim}{s}^z\right\} \quad , \qquad \alpha \in \mathbf{R}\ . \tag{1}$$

Tipp: $\underset{\sim}{\vec{s}}$ als Summe von Spinoperatoren und Einheitsvektoren schreiben; Exponentialfunktion als Reihe schreiben, dann nach Ordnungen von α sortieren, diese vereinfachen und wieder zusammenfassen.

Welche Größe ist offensichtlich unter dieser Transformation erhalten?

b. **Zusatzaufgabe:** Was ist jetzt

$$\exp\left\{-i\vec{\alpha}\cdot\underset{\sim}{\vec{s}}\right\}\ \underset{\sim}{\vec{s}}\ \exp\left\{i\vec{\alpha}\cdot\underset{\sim}{\vec{s}}\right\} \quad , \qquad \vec{\alpha} \in \mathbf{R}^3\ ? \tag{2}$$

c. Wir betrachten jetzt mehrere Spins $\underset{\sim}{\vec{s}}_j$. Berechnen Sie die Wirkung der folgenden Symmetrieoperation

$$\exp\left\{-i\alpha \underset{\sim}{S}^z\right\}\ \underset{\sim}{\vec{s}}_m\cdot\underset{\sim}{\vec{s}}_n\ \exp\left\{i\alpha \underset{\sim}{S}^z\right\}\ , \quad \alpha \in \mathbf{R}\ , \quad \underset{\sim}{\vec{S}} = \sum_j \underset{\sim}{\vec{s}}_j\ . \tag{3}$$

Beschreiben Sie anschaulich, warum das Ergebnis „logisch“ ist.

d. Begründen Sie jetzt, warum

$$\forall\vec{\alpha}\in\mathbf{R}^3 : \exp\left\{-i\vec{\alpha}\cdot\underset{\sim}{\vec{S}}\right\}\ \underset{\sim}{\vec{s}}_m\cdot\underset{\sim}{\vec{s}}_n\ \exp\left\{i\vec{\alpha}\cdot\underset{\sim}{\vec{S}}\right\} \quad = \quad \underset{\sim}{\vec{s}}_m\cdot\underset{\sim}{\vec{s}}_n \tag{4}$$

gilt, nicht aber

$$\forall\vec{\alpha}\in\mathbf{R}^3 : \exp\left\{-i\vec{\alpha}\cdot\underset{\sim}{\vec{S}}\right\}\ \underset{\sim}{s}^z_m\cdot\underset{\sim}{s}^z_n\ \exp\left\{i\vec{\alpha}\cdot\underset{\sim}{\vec{S}}\right\} \quad = \quad \underset{\sim}{s}^z_m\cdot\underset{\sim}{s}^z_n\ . \tag{5}$$

Für welche $\vec{\alpha}$ würde Gleichung (5) gelten?

9.2 Eigenzustände von $SU(2) \times C_4$

Wir betrachten einen Spinring aus 4 paramagnetischen Momenten mit Spinquantenzahl $s = 1/2$ und identischer nächster-Nachbar-Wechselwirkung J, der im Heisenberg-Modell mit periodischen Randbedingungen beschrieben werden soll, d.h.

$$\underset{\sim}{H} = -2J \sum_i \underset{\sim}{\vec{s}}_i \cdot \underset{\sim}{\vec{s}}_{i+1} \ , \qquad \text{mit} \qquad N+1 \equiv 1 \ , \forall i s_i = s \ . \tag{6}$$

Die folgenden Produktzustände bilden eine Orthonormalbasis im Hilbertraum

$$\underset{\sim}{s}_i^z \mid a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N \rangle = (s - a_i) \mid a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N \rangle \ . \tag{7}$$

Dabei gilt $a_i = s - m_i$.
Berechnen Sie soweit wie möglich die gemeinsame Eigenbasis von $\underset{\sim}{\vec{S}}^2$, $\underset{\sim}{S}^z$ und $\underset{\sim}{T}$.

9.3 Charaktertafeln

Erarbeiten Sie sich das Aufstellen von Charaktertafeln anhand des folgenden Auszugs aus Max Wagner, *Gruppentheoretische Methoden der Physik*.

3.10 Konstruktion einer Charaktertafel ◊

Die Charaktertafeln der weitaus meisten Symmetriegruppen, die in der Physik eine Rolle spielen, sind in allgemein zugänglichen Tafeln erfaßt. Sie sind in diesem Buch im Anhang B zu finden. Diese Tafeln stellen demgemäß ein allgemein zur Verfügung stehendes Handwerkszeug dar, so daß der die Gruppentheorie anwendende Wissenschaftler dieselben in den allermeisten Fällen nicht selbst berechnen muß. Trotzdem scheint es angemessen, an dieser Stelle die wesentlichen Hilfsmittel zusammenzustellen, um eine Charaktertafel zu erstellen. In den vorangegangenen Abschnitten haben wir diese Hilfsmittel bereits kennengelernt. Es sind die folgenden:

1. Die *Zahl* n_{ID} der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe ist gleich der Zahl n_{Kl} der Klassen (1. Satz von Burnside):

$$n_{ID} \quad = \quad n_{Kl} = n \tag{3.52}$$

   Die letztere (n_{Kl}) findet man leicht, indem man mittels der Gruppentafel alle zueinander konjugierten Elemente $S = X^{-1}RX$ berechnet.

2. Die Dimensionalitäten d_μ der irreduziblen Darstellungen $\Gamma^{(\mu)}$ werden sodann bestimmt durch die Formel (2. Satz von Burnside)

$$\sum_{\mu=1}^{n} d_\mu^2 = g = \sum_{K=1}^{n} g_K \tag{3.53}$$

   In den meisten Fällen hat diese Gleichung eine eindeutige Lösung.

3. Da das Einselement E durch eine Einheitsmatrix dargestellt werden muß, gilt

$$\chi^{(\mu)}(E) \quad = \quad d_\mu \tag{3.54}$$

   Dies legt die *1. Spalte der Charaktertafel* fest.

4. Da die *„Einsdarstellung"* *immer* als irreduzible Darstellung *existiert*, ist die *1. Zeile* der Charaktertafel immer eine Folge der Zahlen Eins:

$$\chi^{(1)}(K) \quad = \quad 1 \tag{3.55}$$

5. Die *Zeilen* der Tafel müssen *orthogonal* und *auf g normiert* sein mit den Gewichtsfaktoren g_K (Orthogonalität der Charaktere (3.29)):

$$\sum_{K=1}^{n} g_K \, \chi^{(\mu)}(K) \left(\chi^{(\nu)}(K)\right)^* \quad = \quad g \cdot \delta_{\mu\nu} \tag{3.56}$$

6. Die *Spalten* müssen *orthogonale*, *auf* g/g_K *normierte* Vektoren sein (Vollständigkeit der Charaktere (3.30)):

$$\sum_{\mu=1}^{n} \chi^{(\mu)}(K) \left(\chi^{(\mu)}(K')\right)^* \quad = \quad \frac{g}{g_K} \cdot \delta_{KK'} \tag{3.57}$$

7. Die Elemente der *μ-ten Zeile* sind verknüpft durch (3.21)

$$g_i g_j \cdot \chi^{(\mu)}(K_i) \cdot \chi^{(\mu)}(K_j) \quad = \quad d_\mu \cdot \sum_k c_{ijk} \cdot g_k \cdot \chi^{(\mu)}(K_k) \tag{3.58}$$

wobei die Koeffizienten c_{ijk} ganze positive Zahlen (oder Null) sind und durch die Klassenmultiplikation $K_i \times K_j = \sum_k c_{ijk} K_k$ definiert werden (siehe Kapitel 2.8).

Konstruktion der Charaktertafel von C_{3v}

1. Zahl der Klassen:
   $n_{Kl} = 3 = n_{ID} = n$
   Es handelt sich dabei um:
   $K_1 = \{E\} \quad (g_{K_1} = 1)$
   $K_2 = \{C_3, C_3^2\} \quad (g_{K_2} = 2)$
   $K_3 = \{\sigma_v^{(1)}, \sigma_v^{(2)}, \sigma_v^{(3)}\} \quad (g_{K_3} = 3)$
2. Dimension d_μ der Klassen:
   $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 6$
   $\Rightarrow d_1 = d_2 = 1,\, d_3 = 2$

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v^{(1)}$
A_1	1	1	1
A_2	1	x	y
E	2	x'	y'

3. 1. Spalte (Dimension der Darstellung): 1 1 2
4. 1. Zeile (Einsdarstellung): 1 1 1
5. $\sum_{K=1}^{n} g_K\, \chi^{(\mu)}(K)\, (\chi^{(\nu)}(K))^* = g \cdot \delta_{\mu\nu}$
   Ansatz für 2. Zeile: $1\ x\ y$
   $\mu = 1, \nu = 2 \rightarrow 1 + 2x + 3y = 0$
   $\mu = 2, \nu = 2 \rightarrow 1 + 2x^2 + 3y^2 = 6$
   $\Rightarrow x = 1, y = -1 \quad \text{oder} \quad x = -7/5, y = 3/5$
   Ansatz für 3. Zeile: $2\ x'\ y'$
   $\mu = 1, \nu = 3 \rightarrow 2 + 2x' + 3y' = 0$
   $\mu = 3, \nu = 3 \rightarrow 4 + 2x'^2 + 3y'^2 = 6$
   $\Rightarrow x' = -1, y' = 0 \quad \text{oder} \quad x' = 1/5, y' = -4/5$
6. $\sum_{\mu=1}^{n} \chi^{(\mu)}(K)\, (\chi^{(\mu)}(K'))^* = \frac{g}{g_K} \cdot \delta_{KK'}$
   2. Spalte: $1\ x\ x'$
   $K = 1, K' = 2 \rightarrow 1 + x + 2x' = 0$
   $K = 2, K' = 2 \rightarrow 1 + x^2 + x'^2 = 6/2 = 3$
   $\Rightarrow x = 1, x' = -1$ oder $x = -7/5, x' = 3/5$
   Damit eindeutige Lösung: $x = 1$, $y = -1$, $x' = -1$ und $y' = 0$
   Kontrolle mit 3. Spalte: $1\ y\ y'$
   $K = 1, K' = 3 \rightarrow 1 + y + 2y' = 0$
   $K = 3, K' = 3 \rightarrow 1 + y^2 + y'^2 = 6/3 = 2$
   $\Rightarrow y = -1, y' = 0$ oder $x = 0, x' = -1$
   Damit eindeutige Lösung: $x = 1$, $y = -1$, $x' = -1$ und $y' = 0$
7. Die Vorschrift (3.21) dient hier nur zur nochmaligen Konsistenzprüfung.