Universität Bielefeld	Symmetrien in der Physik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	WS 2014/2015	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 7

7.1 Die Gruppe $SU(2)$

Wir betrachten die Gruppe $SU(2)$ der unitären 2×2–Matrizen mit Determinante 1.

a. Ist die $SU(2)$ abelsch?

b. Zeigen Sie, dass $H = \{\underset{\sim}{\mathbb{1}}, -\underset{\sim}{\mathbb{1}}\}$ das Zentrum der $SU(2)$ ist.

c. Die Elemente der $SU(2)$ sind 2×2–Matrizen, die sowohl unitär sind als auch Determinante 1 haben. Das sollte doch die Möglichkeiten stark einschränken! Zeigen Sie, dass man diese Matrizen mit drei reellen Parametern darstellen kann.

Eventuell ist es günstig, erst c zu lösen.

7.2 Die Gruppe Z_6

Wir betrachten die Gruppe Z_6 der Addition der ganzen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ modulo 6.

a. Zeigen Sie, dass Z_6 zyklisch und abelsch ist.

b. Zeigen Sie, dass $N_1 = \{0, 3\}$ und $N_2 = \{0, 2, 4\}$ Untergruppen sowie Normalteiler sind.

c. N_1 ist isomorph zu Z_2 und N_2 ist isomorph zu Z_3. Finden Sie die zugehörigen Abbildungen.

d. Bestimmen Sie die Nebenklassen von N_1. Wie lautet die zugehörige Faktorgruppe? Zeigen Sie, dass diese isomorph zu Z_3 ist. Es gilt also $Z_6/Z_2 \cong Z_3$.

7.3 Konstruktion einer endlichen Gruppe

Vollziehen Sie bitte den folgenden Text aus Lang & Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik* nach und programmieren Sie ein entsprechendes Mathematica-Skript.
Erzeugen Sie entsprechend der Anleitung die Gruppentafel.
Finden Sie Untergruppen?

C.20.1 ...und auf dem Computer:

Konstruktion einer endlichen Gruppe

Um eine endliche Gruppe zu konstruieren, reichen zwei geeignet gewählte Elemente als Ausgangsmenge. Das Einheitselement wird in weiterer Folge „automatisch“ erzeugt. Natürlich muss man auch die Gruppenmultiplikation definieren. Bei Verwendung reeller Zahlen sollte auch vorgegeben werden, wann zwei Elemente als „gleich“ angesehen werden.

Wir wollen als Beispiel die 24 Elemente der Würfelgruppe in der Darstellung reeller 3×3-Matrizen bestimmen. Die Startmenge besteht aus den Elementen

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{C.20.1.1}$$

Das sind die Drehmatrizen für eine Vierteldrehung um die z-Achse und eine Vierteldrehung um die x-Achse.

Man multipliziert die gegebenen Elemente solange miteinander, bis die Menge der Elemente nicht weiter wächst. In MATHEMATICA könnte die Befehlsfolge lauten:

```
a = {{0, 1, 0}, {-1, 0, 0}, {0, 0, 1}};
b = {{1, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, -1, 0}};
GroupSet = {a, b};
Mul[a_, b_] := a.b;
Do[GroupSet = Union[GroupSet, Flatten[Table[
      Mul[GroupSet[[i]], GroupSet[[j]]],
      {i, 1, Length[GroupSet]},{j, 1, Length[GroupSet]}], 1]];
      Print[Length[GroupSet]], {k, 1, 4}]
```

Dabei haben wir die Multiplikation jeweils aller Elemente aus der Menge mit allen Elementen insgesamt viermal (Index k) wiederholt. Der Befehl `Union` sorgt dafür, dass nur neue Elemente zur Menge hinzugefügt werden. Als Output erhielten wir die Zahlen: 6, 21, 24, 24. Die Menge war also mit 24 Elementen vollständig und könnte durch einen `Print`-Befehl ausgeschrieben werden. Auch Untergruppen kann man durch geeignete Wahl der erzeugenden Elemente identifizieren. Zugehörigkeit zu verschiedenen Konjugationsklassen könnte man durch die Spur dieser Elemente feststellen.

Zur Berechnung der Gruppentafel ist es günstig, die Elemente durch fortlaufende Nummern (1 bis 24) zu kennzeichnen. Auch ist es üblich, das Einheitselement mit der Nummer 1 zu versehen. Aus diesem Grund sortieren wir die Menge der Elemente geeignet. Das Ergebnis der Multiplikation zweier Gruppenelemente ist wieder eine Matrix, und die entsprechende Kennzahl muss jeweils ermittelt werden. Der Befehl `GetNum` berechnet die jeweilige Zahl. Damit kann man die Gruppentafel bestimmen:

```
GroupSet = Sort[GroupSet, Tr[#1] > Tr[#2] &];
GetNum[Element_]:= (Do[If[GroupSet[[i]] == Element,
      Return[i]], {i, 1, 24}]);
TableForm[Table[GetNum[Mul[GroupSet[[i]],
      GroupSet[[j]]]], {i, 1, 24}, {j, 1, 24}]];
```