Aufgabenblatt 6

6.1 Translationsoperator

Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$\underset{\sim}{T}_a \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{ia\,\underset{\sim}{p}}{\hbar}} \;, \quad a \in \mathbb{R} \tag{1}$$

zusammen mit der Hintereinanderausführung (Multiplikation) eine Gruppe bilden. Welche Eigenschaften hat diese Gruppe?

6.2 Zyklische Gruppen

Wir betrachten die folgenden Gruppen

$$C_N \;=\; \left(\left\{\underset{\sim}{\mathbb{1}} = \underset{\sim}{T}^0 = \underset{\sim}{T}^N, \underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{T}^2, \dots, \underset{\sim}{T}^{N-1}\right\}, \cdot\right) \tag{2}$$

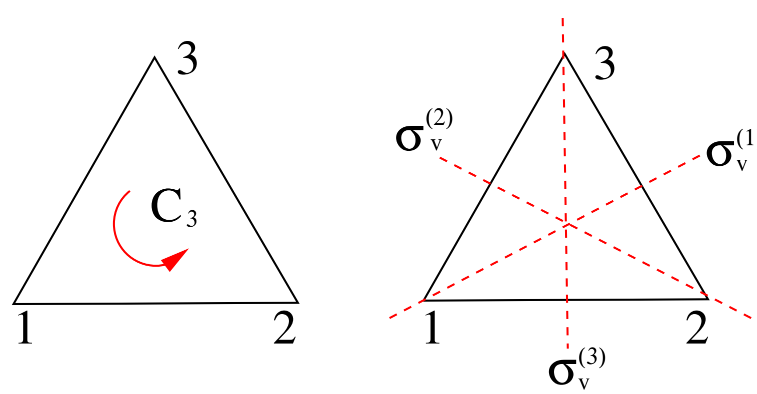
$$EW_N \;=\; \left(\left\{1, e^{-i\,\frac{2\pi}{N}}, e^{-i\,2\,\frac{2\pi}{N}}, \dots, e^{-i\,(N-1)\,\frac{2\pi}{N}}\right\}, \cdot\right) \tag{3}$$

$$Z_N \;=\; \left(\{0, 1, 2, \dots, N-1\}, + \quad \text{modulo} \quad N\right) \; . \tag{4}$$

Überprüfen Sie, ob diese Gruppen sind. Welche Eigenschaften haben diese? Fällt Ihnen etwas auf?

6.3 Die Gruppe C_{3v}

Die Gruppe C_{3v} beschreibt Symmetrietransformationen des gleichseitigen Dreiecks. Die Gruppe enthält sechs Elemente: die Rotationen C_3 um die senkrecht durch den Mittelpunkt des Dreiecks gehende C_3-Achse um jeweils 120° und die Spiegelungen $\sigma_v^{(1)}, \sigma_v^{(2)}, \sigma_v^{(3)}$ an den vertikalen Ebenen, die von den Winkelhalbierenden und der C_3-Achse aufgespannt werden.



Es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} C_3(1,2,3) &= (3,1,2) \qquad \text{und} && (5)\\ \sigma_v^{(2)}(1,2,3) &= (3,2,1)\ . && (6) \end{aligned}$$

a. Stellen Sie die Gruppentafel auf.

b. Finden Sie Untergruppen.

c. Wiederholen Sie die Begriffe *konjugiert* und *Konjugationsklasse* und bestimmen Sie die Konjugationsklassen für C_{3v}.

6.4 Dimension der orthogonalen Unterräume

Wir betrachten einen Spinring aus N paramagnetischen Momenten mit Spinquantenzahl s und identischer nächster-Nachbar-Wechselwirkung J, der im Heisenberg-Modell mit periodischen Randbedingungen beschrieben werden soll, d.h.

$$\underset{\sim}{H} = -2J \sum_i \vec{\underset{\sim}{s}}_i \cdot \vec{\underset{\sim}{s}}_{i+1}\ , \qquad \text{mit} \qquad N+1 \equiv 1\ , \forall i s_i = s\ . \tag{7}$$

Die folgenden Produktzustände bilden eine Orthonormalbasis im Hilbertraum

$$\underset{\sim}{s}_i^z \mid a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N \,\rangle = (s - a_i) \mid a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N \,\rangle\ . \tag{8}$$

Dabei gilt $a_i = s - m_i$.
Im folgenden sei $N = 6$ und $s = 3/2$.

a. Berechnen Sie die Dimension des Hilbertraumes.

b. Nutzen Sie Ihr Mathematica-Script aus 4.2 und bestimmen Sie die Dimensionen der orthogonalen Unterräume $\mathcal{H}(M)$. Wegen

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{M=-M_{\max}}^{+M_{\max}} \mathcal{H}(M) \tag{9}$$

muss die Summe dieser Dimensionen die ursprüngliche Dimension von $\mathcal{H}$ ergeben.

c. Sortieren Sie jetzt noch in jedem Unterraum $\mathcal{H}(M)$ die Zustände entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu Zykeln und bestimmen Sie damit die Dimensionen der orthogonalen Unterräume $\mathcal{H}(M, k)$.

d. Obwohl wir die volle Rotationssymmetrie des Spins gar nicht verwendet haben, kann man trotzdem die Dimensionen der orthogonalen Unterräume $\mathcal{H}(S, M, k)$ bestimmen. Haben Sie eine Idee wie?