Aufgabenblatt 5

5.1 Einmagnonenraum am ferromagnetischen Spinring – Spinwellen

Wir betrachten einen Spinring aus N paramagnetischen Momenten mit Spinquantenzahl s und identischer nächster-Nachbar-Wechselwirkung $J > 0$, der im Heisenberg-Modell mit periodischen Randbedingungen beschrieben werden soll, d.h.

$$\underset{\sim}{H} \;=\; -2J \sum_i \underset{\sim}{\vec{s}}_i \cdot \underset{\sim}{\vec{s}}_{i+1} \ , \qquad \text{mit} \qquad N+1 \equiv 1 \ . \tag{1}$$

Wir betrachten im folgenden den Einmagnonenraum, der von den Produktzuständen

$$\underset{\sim}{s}_i^z \mid a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N \,\rangle \;=\; (s - a_i) \mid a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N \,\rangle \tag{2}$$

mit $\sum_i a_i = 1$ aufgespannt wird. Dabei gilt $a_i = s - m_i$.

a. Berechnen Sie unter Ausnutzung der Translationssymmetrie die Energieeigenwerte im Einmagnonenraum analytisch und stellen Sie das Band graphisch dar. Nehmen Sie für die Graphik irgendein konkretes N und s an (aber nicht für die Herleitung).

b. Berechnen Sie

$$\langle\, \chi_k \mid \underset{\sim}{\vec{s}}_i \mid \chi_k \,\rangle \qquad \forall i \ . \tag{3}$$

c. Berechnen Sie die Erwartungswerte der Skalarprodukte nächster-Nachbar-Spins in der xy-Ebene, d.h.

$$\langle\, \chi_k \mid \left(\underset{\sim}{s}_i^x \underset{\sim}{s}_{i+1}^x + \underset{\sim}{s}_i^y \underset{\sim}{s}_{i+1}^y \right) \mid \chi_k \,\rangle \qquad \forall i \ . \tag{4}$$

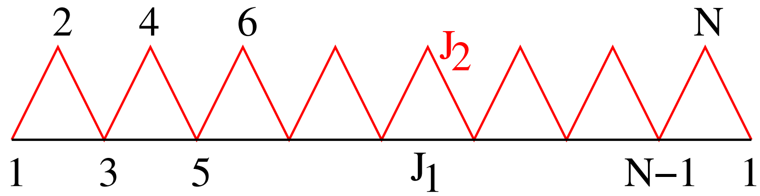
d. Die analytisch bekannten Eigenzustände von $\underset{\sim}{T}$ lassen sich wie folgt darstellen

$$\mid \chi_k \,\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{N} c_j(k) \mid x = j \,\rangle \ , \qquad \text{mit} \qquad \mid x = j \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2s}}\, \underset{\sim}{s}_j^- \mid 000 \dots 000 \,\rangle \ . \tag{5}$$

Suchen Sie sich ein N aus und stellen Sie die Koeffizienten c_i (komplex!) gegen i für mehrere k graphisch dar.

5.2 Hammeraufgabe! Flaches Energieband der Sägezahnkette

Sie sind jung, dynamisch und voller Tatendrang? Bisherige Aufgaben haben Ihnen lediglich ein müdes Lächeln entlockt? Dann sind Sie bei dieser Aufgabe richtig!



Wir betrachten eine Sägezahnkette aus gleichartigen Spins s mit zwei Wechselwirkungen $J_1 < 0$ und $J_2 = 2J_1$ sowie periodischen Randbedingungen, d.h.,

$$\underset{\sim}{H} \quad = \quad -2J_1 \sum_{i=1}^{N/2} \underset{\sim}{\vec{s}}_{2i-1} \cdot \underset{\sim}{\vec{s}}_{2i+1} - 2J_2 \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{\vec{s}}_i \cdot \underset{\sim}{\vec{s}}_{i+1} \ , \qquad \text{mit} \qquad N+1 \equiv 1 \ . \tag{6}$$

Wir betrachten im folgenden den Einmagnonenraum, der von den Produktzuständen

$$\underset{\sim}{s}_i^z \mid a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_N \,\rangle \quad = \quad (s - a_i) \mid a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_N \,\rangle \tag{7}$$

mit $\sum_i a_i = 1$ aufgespannt wird. Dabei gilt $a_i = s - m_i$.

Berechnen Sie unter Ausnutzung der Translationssymmetrie die Energieeigenwerte im Einmagnonenraum analytisch und stellen Sie diese graphisch dar. Wieviele Bänder erhält man?

Beachten Sie dabei die im Vergleich zur Vorlesung veränderte Symmetrie des Systems. Beachten Sie weiterhin, dass Sie 2×2-Matrizen analytisch diagonalisieren können.
Ja, das können Sie. ;-)