Universität Bielefeld	Symmetrien in der Physik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	WS 2014/2015	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 4

4.1 Verschiebungsoperator

Wir betrachten einen Spinring im Heisenberg-Modell, d.h.

$$\underset{\sim}{H} \;=\; -2J \sum_i \underset{\sim}{\vec{s}}_i \cdot \underset{\sim}{\vec{s}}_{i+1} \; . \tag{1}$$

Alle Spins haben die gleiche Spinquantenzahl s.

a. Wiederholen Sie, wie der Verschiebungsoperator $\underset{\sim}{T}$ definiert war.

b. Zeigen Sie, dass $\underset{\sim}{T}$ unitär ist.

c. Beweisen Sie, dass

$$\left[\underset{\sim}{H}, \underset{\sim}{T}\right] \;=\; 0 \; . \tag{2}$$

Untersuchen Sie dazu zuerst, was $\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{\vec{s}}_i\,\underset{\sim}{T}^\dagger$ ergibt. Genaugenommen reicht es, wenn Sie das für die z-Komponente von $\underset{\sim}{\vec{s}}_i$ untersuchen.

4.2 Basen für Spinsysteme

Wir betrachten wechselwirkende quantenmechnische paramagnetische Momente mit Spinquantenzahl s. Die Wechselwirkung werde durch das Heisenberg-Modell beschrieben, d.h.

$$\underset{\sim}{H} \;=\; -\sum_{i,j} J_{ij}\, \underset{\sim}{\vec{s}}_i \cdot \underset{\sim}{\vec{s}}_j \; . \tag{3}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren müssen jetzt in einer gewählten Darstellung berechnet werden. Im folgenden seien alle Spinquantenzahlen gleich, so dass wir sie in der Bezeichnung der Basiszustände weglassen können.
Die einfachste Basis ist die Produktbasis

$$\underset{\sim}{s}_i^z \,|\, m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N \,\rangle \;=\; m_i \,|\, m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N \,\rangle \; . \tag{4}$$

Diese Basis kann äquivalent durch Quantenzahlen $a_i = s - m_i$ codiert werden, dann gilt

$$\underset{\sim}{s}_i^z \,|\, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N \,\rangle \;=\; (s - a_i) \,|\, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N \,\rangle \; . \tag{5}$$

Die a_i laufen dabei von 0 bis $2s$.

Im weiteren sei $N = 6$ und $s = 1/2$.

a. Erzeugen Sie mit einem Mathematica-Script die gesamte Produktbasis. Erläutern Sie in der Übung, wie das geht.

b. Da $\underset{\sim}{S}^z$ mit $\underset{\sim}{H}$ vertauscht, ist es günstiger, in Unterräumen zu festem M, also in $\mathcal{H}(M)$ zu arbeiten. Schreiben Sie deshalb in einem zweiten Schritt ein Mathematica-Script, das die gesamte Basis entsprechend M sortiert. In der Codierung korrespondiert M zu $a = Ns - M$.

c. Nehmen Sie an, dass es sich bei dem Spinsystem um einen Ring mit Translationssymmetrie handele. Die Spins des Rings seinen durchnummeriert. Sortieren Sie jetzt noch in jedem Unterraum $\mathcal{H}(M)$ die Zustände entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu Zykeln.

d. Wenn Sie das Mathematica-Notebook schön allgemein geschrieben haben, können Sie jetzt am Anfang einfach N und s ändern und es z.B. für $N = 8$ und $s = 1$ durchlaufen lassen. Na, geht's?

P.S.: Die Variable N dürfen Sie in Mathematica nicht benutzen, da sie ein Befehl ist (siehe Hilfe).
P.P.S.: Bringen Sie bitte zur Übung Ihren Laptop oder Ihr Mathematica-Notebook auf einem Stick mit. Falls das alles nicht geht, schicken Sie es bitte vor der Übung per Email an den Tutor.
P.P.P.S.: Eine zyklische Permutation, kurz Zyklus oder Zykel (von griechisch Kreis), ist in der Kombinatorik und der Gruppentheorie eine Permutation, die bestimmte Elemente einer Menge im Kreis vertauscht und die übrigen festhält.
P.P.P.P.S.: Heuristik (altgr. heurisko „ich finde“) bezeichnet die Kunst, mit begrenztem Wissen (unvollständigen Informationen) und wenig Zeit zu guten Lösungen zu kommen. Also ein typisch studendisches Vorgehen. ;-)