

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Symmetrien in der Physik WS 2014/2015	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	--	---

## Aufgabenblatt 3

### 3.1 Spinkopplung

- Zeigen Sie, dass der Gesamtspin zweier Spins ein Drehimpulsoperator ist. Zeigen Sie, dass die Quadrate dieser Operatoren paarweise kommutieren.
- Zwei Spins  $s = 1$  sollen gekoppelt werden. Berechnen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten.
- Mehr als zwei Spins koppelt man in Schritten, z.B. erst zwei, dann den nächsten dazu. Es sollen drei Spins  $s = 2$  gekoppelt werden. Welche Gesamtspins kann ich erreichen und wie oft treten diese auf (Entartung)? Prüfen Sie die Dimension des Hilbertraumes.

### 3.2 Spindimer

Wir betrachten 2 wechselwirkende quantenmechanische paramagnetische Momente mit Spinquantenzahl  $s$ . Die Wechselwirkung werde durch das Heisenberg-Modell beschrieben, d.h.

$$\underline{H} = -\frac{2J}{\hbar^2} \underline{\tilde{s}}_1 \cdot \underline{\tilde{s}}_2 . \quad (1)$$

Dabei sei  $J < 0$  die antiferromagnetische Kopplung.

- Wie lauten die Energieeigenwerte des Hamiltonoperators für beliebige Spinquantenzahlen  $s_1 = s_2 = s$ ?
- Wie lauten die Eigenzustände von  $\underline{H}$  im Falle  $s_1 = s_2 = 1/2$  dargestellt in der Eigenbasis zu  $\underline{s}_1^z$  und  $\underline{s}_2^z$  (Produktbasis)?
- Welche Operatoren vertauschen mit  $\underline{H}$  und untereinander, d. h. bilden einen Satz kommutierender Observabler?
- Für  $s_1 = s_2$  hat der Hamiltonoperator noch eine interessante Permutationssymmetrie. Welche? Was bedeutet das für die Eigenzustände? Prüfen Sie es nach.

### 3.3 Auf- und Absteiger

Zeigen Sie, dass gilt

$$\underline{\tilde{s}}_i \cdot \underline{\tilde{s}}_j = \underline{s}_i^z \underline{s}_j^z + \frac{1}{2} \left[ \underline{s}_i^+ \underline{s}_j^- + \underline{s}_i^- \underline{s}_j^+ \right] . \quad (2)$$