Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Symmetrien in der Physik WS 2014/2015	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
Name, Vorname jeweils nicht vergessen.

1 Wissen (49 P.)

a. Was versteht man unter Symmetrie in der Physik (2 P.)? Wie werden Symmetrien modelliert (1 P.)? Was hat man davon (5 P.)? Geben Sie zusätzlich drei konkrete Beispiele an, benennen Sie die Symmetrie, durch welche Gruppe sie modelliert wird und welche Vorteile man davon hat (9 P.).

b. Was ist eine Gruppe (4 P.)?

c. Wir betrachten ein translationssymmetrisches System aus acht Einheiten, z.B. einen Spinring aus acht Spins. Durch welche Gruppe kann man diese Symmetrie beschreiben (1 P.)? Stellen Sie die Gruppentafel auf (2 P.). Wieviele irreduzible Darstellungen besitzt diese Gruppe und warum (2 P.)? Welche Charaktere treten auf (2 P.)? Hat diese konkrete Gruppe Untergruppen, und wenn ja, welche (2 P.)?

d. Wie lautet das Wigner-Eckart-Theorem in einer Ihnen sympatischen Form (3 P.)? Benennen Sie alle auftretenden Größen (4 P.). Welche Vorteile kann man aus dem Theorem ziehen (3 P.)?

e. Ein kartesischer Tensor zweiter Stufe, $x_m x_n$, werde aus den Komponenten eines Ortsoperators gebildet. Dieses Objekt kann so umgeformt werden, dass man Bestandteile erhält, die sich wie sphärische Tensoren zu $\ell = 0, 1, 2$ transformieren. Geben Sie diese Zerlegung an (6 P.).

f. Geben Sie an, wie man eine Menge quantenmechanischer Zustände mit Hilfe der Wignerschen *basis function generating machine* auf irreduzible Darstellungen einer endlichen Gruppe projizieren kann (2 P.). Welche Voraussetzung muss die Menge der Zustände erfüllen (1 P.)?

2 Können

2.1 Translationsoperator (16 P.)

Im Zusammenhang mit Translationssymmetrien soll der folgende Operator betrachtet werden, der definiert ist als:

$$\underset{\sim}{T}_a \quad = \quad \mathrm{e}^{-\frac{i a \underset{\sim}{p}}{\hbar}} \ , \quad a \in \mathbb{R} \ . \tag{1}$$

a. Begründen Sie, dass $\underset{\sim}{T}_a$ unitär ist (2 P.).

b. Wie wirkt $\underset{\sim}{T}_a$ auf einen Zustand $|\,\phi\,\rangle$ (1 P.)? Kurze Herleitung (3 P.).

c. Was ist $\underset{\sim}{T}_a \underset{\sim}{x} \underset{\sim}{T}_a^\dagger$ (1 P.)? Kurze Herleitung (3 P.).

d. Zeigen Sie, dass die Operatoren $\underset{\sim}{T}_a$ zusammen mit der Hintereinanderausführung (Multiplikation) eine Gruppe bilden (4 P.). Welche Eigenschaften hat diese Gruppe (2 P.)?

3 Weiterdenken

3.1 Dimension der orthogonalen Unterräume (30 P.)

Wir betrachten einen Spinring aus N paramagnetischen Momenten mit Spinquantenzahl s und identischer nächster-Nachbar-Wechselwirkung J, der im Heisenberg-Modell mit periodischen Randbedingungen beschrieben werden soll, d.h.

$$\underset{\sim}{H} = -2J \sum_i \underset{\sim}{\vec{s}}_i \cdot \underset{\sim}{\vec{s}}_{i+1} \ , \qquad \text{mit} \qquad N+1 \equiv 1 \ , \forall i s_i = s \ . \tag{2}$$

Die folgenden Produktzustände bilden eine Orthonormalbasis im Hilbertraum

$$\underset{\sim}{s}_i^z \, | \, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_N \, \rangle = (s - a_i) \, | \, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_N \, \rangle \ . \tag{3}$$

Dabei gilt $a_i = s - m_i$.
Im folgenden sei $N = 4$ und $s = 1/2$.

a. Berechnen Sie die Dimension des Hilbertraumes (2 P.).

b. Welche Symmetrien hat der Hamiltonoperator Gl. (2) (3 P.)?

c. Bestimmen Sie die Dimensionen der orthogonalen Unterräume $\mathcal{H}(M)$ (4 P.). Wegen

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{M=-M_{\max}}^{+M_{\max}} \mathcal{H}(M) \tag{4}$$

muss die Summe dieser Dimensionen die ursprüngliche Dimension von $\mathcal{H}$ ergeben. Überprüfen Sie dies (1 P.).

d. Sortieren Sie jetzt noch in jedem Unterraum $\mathcal{H}(M)$ die Zustände entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu Zykeln und bestimmen Sie damit die Dimensionen der orthogonalen Unterräume $\mathcal{H}(M, k)$ (10 P.).

e. Obwohl wir die volle Rotationssymmetrie des Spins gar nicht verwendet haben, kann man trotzdem die Dimensionen der orthogonalen Unterräume $\mathcal{H}(S, M, k)$ bestimmen. Bestimmen Sie diese Dimensionen (10 P.).

3.2 Tight-binding-Modell (20 P.)

Das Hubbard-Modell einer eindimensionalen Kette ist durch den folgenden Hamiltonoperator gegeben

$$\underset{\sim}{H} = -t \sum_{j=1}^{L} \sum_{\sigma=\pm 1/2} \left(\underset{\sim}{c}^{\dagger}_{j,\sigma} \underset{\sim}{c}_{j+1,\sigma} + \underset{\sim}{c}^{\dagger}_{j+1,\sigma} \underset{\sim}{c}_{j,\sigma} \right) + U \sum_{j=1}^{L} \underset{\sim}{n}_{j,1/2} \underset{\sim}{n}_{j,-1/2} \ . \tag{5}$$

Dabei sind die $\underset{\sim}{c}^{\dagger}_{j,\sigma}$ Erzeuger von Fermionen mit Spin 1/2 am Platz j mit m-Quantenzahl $m = \sigma$. $\underset{\sim}{c}_{j,\sigma}$ sind die entsprechenden Vernichter, $\underset{\sim}{n}_{j,\sigma} = \underset{\sim}{c}^{\dagger}_{j,\sigma} \underset{\sim}{c}_{j,\sigma}$ die Besetzungszahloperatoren. $t, U \in \mathbb{R}$. L ist die Anzahl der Plätze.
Die Erzeuger und Vernichter gehorchen den folgenden Antikommutatorrelationen

$$\left\{ \underset{\sim}{c}^{\dagger}_{j,\sigma}, \underset{\sim}{c}^{\dagger}_{j',\sigma'} \right\} = \left\{ \underset{\sim}{c}_{j,\sigma}, \underset{\sim}{c}_{j',\sigma'} \right\} = 0 \tag{6}$$

$$\left\{ \underset{\sim}{c}_{j,\sigma}, \underset{\sim}{c}^{\dagger}_{j',\sigma'} \right\} = \delta_{jj'} \delta_{\sigma\sigma'} \ . \tag{7}$$

Für $U = 0$ vereinfacht sich der Hamiltonoperator (5) zum Hamiltonoperator des *tight-binding*-Modells. Man könnte diese translationssymmetrischen Hamiltonoperatoren wie gehabt durch Einführung einer Eigenbasis zum Translationsoperator diagonalisieren, im Falle von Einteilchenoperatoren wie dem Hamiltonoperator des *tight-binding*-Modells kann man dies aber durch eine Transformation von $\underset{\sim}{H}$ auf Diagonalform ganz allgemein erreichen. Dazu führt man neue Operatoren

$$\underset{\sim}{d}^{\dagger}_{k,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=1}^{L} \exp\left[i \frac{2\pi k j}{L} \right] \underset{\sim}{c}^{\dagger}_{j,\sigma} \ , \quad k = 0, 1, \ldots L-1 \ , \tag{8}$$

ein.

a. Wie lautet die Transformation für die Vernichter (2 P.)?

b. Zeigen Sie, dass die kanonischen Vertauschungsrelationen (6) auch für die neuen Erzeuger und Vernichter gelten (6 P.).

c. Wie lautet die Rücktransformation (2 P.)?

d. Was erhält man für den *tight-binding*-Hamiltonoperator (4 P.)? Wie lauten die Eigenwerte und wie die Eigenzustände (6 P.)?

Es können 115 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 65 \Rightarrow 3.3$
- $66 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.0$
- $71 \leq P \leq 75 \Rightarrow 2.7$
- $76 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$