Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Symmetrien in der Physik WS 2014/2015	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	--	---

**Bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
Name, Vorname jeweils nicht vergessen.**

1 Wissen (49 P.)

- Was versteht man unter Symmetrie in der Physik (2)? Wie werden Symmetrien modelliert (1)? Was hat man davon (5)? Geben Sie zusätzlich drei Beispiele an, benennen Sie die Symmetrie, durch welche Gruppe sie modelliert wird und welche Vorteile man davon hat (9).
- Was ist eine Gruppe (4)?
- Wir betrachten ein translationssymmetrisches System aus sechs Einheiten, z.B. einen Spinning aus sechs Spins. Durch welche Gruppe kann man diese Symmetrie beschreiben (1)? Stellen Sie die Gruppentafel auf (2). Wieviele irreduzible Darstellungen besitzt diese Gruppe und warum (2)? Welche Charaktere treten auf (2)? Hat diese konkrete Gruppe Untergruppen, und wenn ja, welche (2)?
- Wie lautet das Wigner-Eckart-Theorem in einer Ihnen sympatischen Form (3)? Benennen Sie die auftretenden Größen (4). Welche Vorteile kann man aus dem Theorem ziehen (3)?
- Ein kartesischer Tensor zweiter Stufe, $x_m x_n$, werde aus den Komponenten eines Ortsoperators gebildet. Dieses Objekt kann so umgeformt werden, dass man Bestandteile erhält, die sich wie sphärische Tensoren zu $\ell = 0, 1, 2$ transformieren. Geben Sie diese Zerlegung an (6).
- Welche Größen sind jeweils erhalten, wenn die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems invariant ist unter (a) globalen Verschiebungen, (b) globalen Drehungen sowie (c) Verschiebungen in der Zeit (3)? Keine Herleitung.

2 Können

2.1 Translationsoperator (16 P.)

Im Zusammenhang mit Translationssymmetrien soll der folgende Operator betrachtet werden, der definiert ist als:

$$\tilde{T}_a = e^{-\frac{ia\hat{p}}{\hbar}}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- Begründen Sie, dass $\tilde{T}_a$ unitär ist (2).
- Wie wirkt $\tilde{T}_a$ auf einen Zustand $|\phi\rangle$ (1)? Kurze Herleitung (3).
- Was ist $\tilde{T}_a x \tilde{T}_a^\dagger$ (1)? Kurze Herleitung (3).
- Zeigen Sie, dass die Operatoren $\tilde{T}_a$ zusammen mit der Hintereinanderausführung (Multiplikation) eine Gruppe bilden (4). Welche Eigenschaften hat diese Gruppe (2)?

3 Weiterdenken

3.1 Einmagnonenraum am ferromagnetischen Spinning – Spinwellen (30 P.)

Wir betrachten einen Spinning aus N paramagnetischen Momenten mit Spinquantenzahl s und identischer nächster-Nachbar-Wechselwirkung $J > 0$, der im Heisenberg-Modell mit periodischen Randbedingungen beschrieben werden soll, d.h.

$$\tilde{H} = -2J \sum_i \vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+1}, \quad \text{mit} \quad N+1 \equiv 1. \quad (2)$$

Die Produktzustände seien wie üblich definiert

$$\tilde{s}_i^z |a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N\rangle = (s - a_i) |a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N\rangle. \quad (3)$$

Dabei gilt $a_i = s - m_i$.

- Welche Symmetrien hat der Hamiltonoperator in Gl. (2) (3)?
- Wie ist der Verschiebungsoperator $\tilde{T}$ definiert (2)?
- Beweisen Sie, dass

$$[\tilde{H}, \tilde{T}] = 0. \quad (4)$$

Untersuchen Sie dazu zuerst, was $\tilde{T} \vec{s}_i \tilde{T}^\dagger$ ergibt. Es reicht aus, wenn Sie das für die z -Komponente von $\vec{s}_i$ untersuchen (10).

- Berechnen Sie unter Ausnutzung der Translationssymmetrie die Energieeigenwerte im Einmagnonenraum ($\sum_i a_i = 1$) analytisch und stellen Sie das Band graphisch dar (15). Sie können verwenden, dass $\tilde{s}^+ |a = 1\rangle = \sqrt{2s}$ und $\tilde{s}^- |a = 0\rangle = \sqrt{2s}$.

3.2 Verzweigungsverhältnisse (branching ratios) (20 P.)

Kann ein Zustand mit Hilfe eines Übergangsoperators in mehrere Zielzustände zerfallen, so nennt man dies *branching* und Verhältnisse der Intensitäten *branching ratios*. Unter Umständen kann man diese Verhältnisse vollständig aus den Clebsch-Gordan-Koeffizienten ableiten. Die Intensität ist dabei proportional zum Betragsquadrat des Übergangsmatrixelements.

Berechnen Sie die Verzweigungsverhältnisse für den spontanen Zerfall des Zustandes $|n = 3, l = 2, m_l = 0\rangle$ eines Wasserstoffartigen Systems unter Aussendung von Dipolstrahlung. Überlegen Sie sich zuerst, in wieviele und welche Zustände dieser Zustand zerfallen kann.

Es können 115 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 65 \Rightarrow 3.3$
- $66 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.0$
- $71 \leq P \leq 75 \Rightarrow 2.7$
- $76 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

l	m	l'	m'	L	M	$\langle l, m; l', m' L, M \rangle$
1/2	1/2	1/2	-1/2	0	0	$\sqrt{1/2}$
1/2	-1/2	1/2	1/2	0	0	$-\sqrt{1/2}$
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1
1/2	1/2	1/2	-1/2	1	0	$\sqrt{1/2}$
1/2	-1/2	1/2	1/2	1	0	$\sqrt{1/2}$
1/2	-1/2	1/2	-1/2	1	-1	1
1	1	1	1	2	2	1
1	1	1	0	2	1	$\sqrt{1/2}$
1	0	1	1	2	1	$\sqrt{1/2}$
1	1	1	0	1	1	$\sqrt{1/2}$
1	0	1	1	1	1	$-\sqrt{1/2}$
1	0	1	0	2	0	$\sqrt{2/3}$
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	$-\sqrt{1/3}$
2	0	1	0	1	0	$-\sqrt{2/5}$
2	0	1	-1	1	-1	$\sqrt{1/10}$
2	0	1	1	1	1	$\sqrt{1/10}$
2	0	1	0	2	0	0
2	0	1	0	3	0	$\sqrt{3/5}$
2	1	1	0	1	1	$-\sqrt{3/10}$
2	1	1	1	2	2	$-\sqrt{1/3}$
2	1	1	-1	1	0	$\sqrt{3/10}$
2	1	1	-1	2	0	$\sqrt{1/2}$

Tabelle 1: Einige Clebsch-Gordan-Koeffizienten.