Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Symmetrien in der Physik WS 2014/2015	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Problem sheet 7

7.1 The group $SU(2)$

We consider the group $SU(2)$ which consists of the unitary 2×2–matrices with determinant 1.

a. Is $SU(2)$ abelian?

b. Show that $H = \{\underset{\sim}{1}, -\underset{\sim}{1}\}$ is the center of $SU(2)$.

c. The elements of $SU(2)$ are 2×2–matrices which are unitary and have determinant 1, which should reduce the options to express them in terms of real numbers. Show that three real parameters suffice.

It might be advantageous to solve c first.

7.2 The group Z_6

We consider the group Z_6 that consists of the integer numbers $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ and the addition modulo 6.

a. Show that Z_6 is cyclic and abelian.

b. Show that $N_1 = \{0, 3\}$ and $N_2 = \{0, 2, 4\}$ are subgroups as well as normal subgroups.

c. N_1 is isomorphic to Z_2 and N_2 isomorphic to Z_3. Determine the respective mappings.

d. Determine the cosets of N_1. What is the related quotient group (or factor group)? Show that the quotient group is isomorphic to Z_3, i.e. we have $Z_6/Z_2 \cong Z_3$.

7.3 Construction of a finite group

Practice your German with the following text from Lang & Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik* and program the respective Mathematica script. Create the group table. Find subgroups.

C.20.1 ...und auf dem Computer:

Konstruktion einer endlichen Gruppe

Um eine endliche Gruppe zu konstruieren, reichen zwei geeignet gewählte Elemente als Ausgangsmenge. Das Einheitselement wird in weiterer Folge „automatisch“ erzeugt. Natürlich muss man auch die Gruppenmultiplikation definieren. Bei Verwendung reeller Zahlen sollte auch vorgegeben werden, wann zwei Elemente als „gleich“ angesehen werden.

Wir wollen als Beispiel die 24 Elemente der Würfelgruppe in der Darstellung reeller 3×3-Matrizen bestimmen. Die Startmenge besteht aus den Elementen

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{C.20.1.1}$$

Das sind die Drehmatrizen für eine Vierteldrehung um die z-Achse und eine Vierteldrehung um die x-Achse.

Man multipliziert die gegebenen Elemente solange miteinander, bis die Menge der Elemente nicht weiter wächst. In MATHEMATICA könnte die Befehlsfolge lauten:

```
a = {{0, 1, 0}, {-1, 0, 0}, {0, 0, 1}};
b = {{1, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, -1, 0}};
GroupSet = {a, b};
Mul[a_, b_] := a.b;
Do[GroupSet = Union[GroupSet, Flatten[Table[
      Mul[GroupSet[[i]], GroupSet[[j]]],
      {i, 1, Length[GroupSet]},{j, 1, Length[GroupSet]}], 1]];
      Print[Length[GroupSet]], {k, 1, 4}]
```

Dabei haben wir die Multiplikation jeweils aller Elemente aus der Menge mit allen Elementen insgesamt viermal (Index k) wiederholt. Der Befehl `Union` sorgt dafür, dass nur neue Elemente zur Menge hinzugefügt werden. Als Output erhielten wir die Zahlen: 6, 21, 24, 24. Die Menge war also mit 24 Elementen vollständig und könnte durch einen `Print`-Befehl ausgeschrieben werden. Auch Untergruppen kann man durch geeignete Wahl der erzeugenden Elemente identifizieren. Zugehörigkeit zu verschiedenen Konjugationsklassen könnte man durch die Spur dieser Elemente feststellen.

Zur Berechnung der Gruppentafel ist es günstig, die Elemente durch fortlaufende Nummern (1 bis 24) zu kennzeichnen. Auch ist es üblich, das Einheitselement mit der Nummer 1 zu versehen. Aus diesem Grund sortieren wir die Menge der Elemente geeignet. Das Ergebnis der Multiplikation zweier Gruppenelemente ist wieder eine Matrix, und die entsprechende Kennzahl muss jeweils ermittelt werden. Der Befehl `GetNum` berechnet die jeweilige Zahl. Damit kann man die Gruppentafel bestimmen:

```
GroupSet = Sort[GroupSet, Tr[#1] > Tr[#2] &];
GetNum[Element_]:= (Do[If[GroupSet[[i]] == Element,
      Return[i]], {i, 1, 24}]);
TableForm[Table[GetNum[Mul[GroupSet[[i]],
      GroupSet[[j]]]], {i, 1, 24}, {j, 1, 24}]];
```