Universität Bielefeld	Theoretische Physik II	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2013	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 11

11.1 Grundzustand im H-Atom

a. Lösen Sie die Eigenwertgleichung für das Coulombpotential direkt mit dem Ansatz

$$\phi(r) \quad = \quad \mathrm{e}^{-\kappa r} \; , \qquad \kappa > 0 \; . \tag{1}$$

b. Bestimmen Sie die Normierungskonstante.

c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Elektron innerhalb des Bohrschen Radius a anzutreffen. Berechnen Sie ebenfalls die Wahrscheinlichkeiten für $2a$ und $3a$.

d. Berechnen Sie den Erwartungswert des Radius $\langle\, \underset{\sim}{r} \,\rangle$ sowie den Erwartungswert $\langle\, \underset{\sim}{r}^2 \,\rangle$.

e. Vergleichen Sie die Größenordnungen von $\sqrt{\langle\, \underset{\sim}{r}^2 \,\rangle - \langle\, \underset{\sim}{r} \,\rangle^2}$ und $\langle\, \underset{\sim}{r} \,\rangle$.

11.2 Wasserstoff-Problem II

a. Zeigen Sie, dass der Bohr-Radius den wahrscheinlichten Wert des Elektron-Proton-Abstandes darstellt, d.h. Maximum der Funktion $r^2 R_{10}^2(r)$ ist. Warum betrachtet man eigentlich diese Funktion und nicht $R_{10}^2(r)$?

b. Bestimmen Sie den minimalen (klassischen Wert) des effektiven Potentials

$$V_{\text{eff}}(r) \quad = \quad -\frac{\epsilon^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \tag{2}$$

für $l = 1, 2, 3, \ldots$ und vergleichen Sie diesen mit den Energeieeigenwerten des Wasserstoffatoms. Was lernen wir daraus?

Literatur: Diese Aufgabe ist aus der Aufgabe 37 (Blatt 12, TP2, 2012) von Prof. Dr. York Schröder hervorgegangen.

11.3 Zusatzaufgabe: Legendre-Polynome

Bestimmen Sie die Lösungen der Legendre-Differentialgleichung sowie der verallgemeinerten Legendre-Differentialgleichung. Für die, die es selbst probieren möchten: ein Potenzreihenansatz hilft. Für die, die es sich aus der Lieteratur erarbeiten möchten: im Pucker-Lang steht alles.