Universität Bielefeld	Theoretische Physik II	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2013	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 10

10.1 Bahndrehimpuls

Der Bahndrehimpuls ist wie folgt definiert:

$$\underset{\sim}{\vec{L}} = \underset{\sim}{\vec{x}} \times \underset{\sim}{\vec{p}} \tag{1}$$

a. Zeigen Sie, dass $\underset{\sim}{\vec{L}}$ hermitesch ist.

b. Leiten Sie den Kommutator $[\underset{\sim}{L}_x, \underset{\sim}{L}_y]$ her.

c. Leiten Sie den Kommutator $[\underset{\sim}{\vec{L}}^2, \underset{\sim}{L}_z]$ her.

d. Leiten Sie den Kommutator $[\underset{\sim}{\vec{x}}^2, \underset{\sim}{L}_z]$ her.

e. Leiten Sie den Kommutator $[\underset{\sim}{\vec{p}}^2, \underset{\sim}{L}_z]$ her.

f. Leiten Sie den Kommutator $[\underset{\sim}{L}^+, \underset{\sim}{L}^-]$ her.

10.2 Der starre Rotator

Eine starre Hantel rotiere im Raum um den Koordinatenursprung, d.h. ihre Freiheitsgrade sind ϑ und ϕ. Diese Bewegung werde durch den Hamiltonoperator

$$\underset{\sim}{H} = \frac{1}{2J}\underset{\sim}{\vec{L}}^2 \tag{2}$$

beschrieben. Dabei ist J das Trägheitsmoment.

a. Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenfunktionen und eventuellen Entartungsgrade.

b. Der Rotator befinde sich im Zustand $\psi(\vartheta, \phi) = c\{\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)\cos(2\phi)\}$. Normieren Sie diese Funktion und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten bei einer Messung von $\underset{\sim}{\vec{L}}^2$ die Werte $6\hbar^2$, $2\hbar^2$ oder 0 zu erhalten.
Tipp: Drücken Sie die Winkelfunktionen durch Kugelflächenfunktionen aus.

c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei Messung von $\underset{\sim}{\vec{L}}^2$ und $\underset{\sim}{L}_z$ das Wertepaar $(6\hbar^2, -2\hbar)$ zu erhalten.

10.3 Kugelflächenfunktionen

Stellen Sie die Kugelflächenfunktionen für $l = 0, 1, 2, 3$ mit Hilfe von Mathematica graphisch dar. Schauen Sie dazu in der Hilfe von `SphericalPlot3D` nach.