Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2013	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 9

9.1 Eindimensionaler Harmonischer Oszillator

a. Für den ersten angeregten Zustand des harmonischen Oszillators berechne man die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im klassisch verbotenen Bereich. Das Ergebnis ist eine Zahl.

b. Berechnen Sie formelmäßig $\frac{d}{dt}\,\langle\,\Psi(t)\,|\,\underset{\sim}{x}\,|\,\Psi(t)\,\rangle$ sowie $\frac{d}{dt}\,\langle\,\Psi(t)\,|\,\underset{\sim}{p}\,|\,\Psi(t)\,\rangle$ für einen allgemeinen Zustand $|\,\Psi(t)\,\rangle$.

c. Für die folgende Linearkombination aus Grundzustand und erstem angeregten Zustand, $|\,\Psi(t=0)\,\rangle = 1/\sqrt{2}(\,|\,\phi_0\,\rangle + \,|\,\phi_1\,\rangle)$, berechne man formelmäßig die Zeitentwicklung des mittlern Ortes sowie des mittleren Impulses.

d. Stellen Sie die Zeitentwicklung von $|\,\Psi(t=0)\,\rangle = 1/\sqrt{2}(\,|\,\phi_0\,\rangle + \,|\,\phi_1\,\rangle)$ graphisch dar.

9.2 Neutronenflummi

Die Zeitentwicklung eines Neutrons, das im Gravtationsfeld der Erde fällt und am Boden reflektiert wird, kann mit einem Hamiltonoperator modelliert werden, der ein Potential der folgenden Form enthält:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ mgx & \text{für } 0 \leq x \end{cases} . \qquad (1)$$

Um die Zeitentwicklung zu beschreiben, bietet es sich an, zuerst die stationäre Schrödingergleichung zu lösen und dann den Zeitentwicklungsoperator in Spektraldarstellung zu nutzen.

a. Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der stationären Schrödingergleichung für das Potential (1). Die Eigenfunktionen sind die sogenannten Airy-Funktionen.

b. Stellen Sie die niedrigsten fünf Wellenfunktionen graphisch dar.

c. Schreiben Sie ein Mathematica-Programm, mit dem man die Zeitentwicklung eines Anfangszustandes beschreiben kann. Drehen Sie einen Film über ein frei fallendes Neutron. In Mathematica heißt die Airy-Funktion `AiryAi`, ihre Nullstellen `AiryAiZero`

d. **Zusatz:** Überprüfen Sie die Gültigkeit des Ehrenfest-Theorems, d.h. untersuchen Sie für ein Beispiel die Zeitentwicklung des (mittleren) Ortes eines klassischen Teilchens sowie für ein Wellenpaket.

   Wer diese Teilaufgabe löst, kann mit der Lösung gleich in seine Bachelorarbeit einsteigen, die dann damit in großen Teilen auch schon geschafft ist!

9.3 Zusatzaufgabe: Vertauschung beschränkter Operatoren

Beweisen Sie, dass beschränkte nichtkommutierende Operatoren nicht zu einer Zahl vertauschen können.
Das typische Beispiel für unbeschränkte Operatoren, die zu einer Zahl vertauschen, sind $\underset{\sim}{x}$ und $\underset{\sim}{p}$, für die gilt

$$[\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{p}] \quad = \quad i\hbar \; . \tag{2}$$

a. Überlegen Sie sich zuerst, wie Sie beschränkte Operatoren $\underset{\sim}{A}$ und $\underset{\sim}{B}$ definieren wollen. Verwenden Sie z. B. die Supremumsnorm.

b. Führen Sie einen indirekten Beweis. Nehmen Sie dazu an, dass $[\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}] = \underset{\sim}{\mathbb{1}}$.

c. Beweisen Sie zuerst mit vollständiger Induktion, dass $\underset{\sim}{A}^n \underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}^n = n\underset{\sim}{A}^{n-1}$.

d. Zeigen Sie, indem Sie $||\, n\underset{\sim}{A}^{n-1}\, ||$ untersuchen, dass $n \leq 2||\, \underset{\sim}{A}\, || \cdot ||\, \underset{\sim}{B}\, ||$ im Widerspruch zur Annahme.