

Aufgabenblatt 6

6.1 Funktionen auf $[a, b]$ mit Randbedingung

Man betrachte die stetigen komplexwertigen Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.

Auf dem Intervall sei ebenfalls ein Funktionensystem gegeben:

$$\langle x | u_n \rangle = u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\frac{n\pi}{L} x \right] \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

- Skizzieren Sie die ersten drei Funktionen u_1, u_2, u_3 .
- Überprüfen Sie, ob die Funktionen $|u_n\rangle$ ein Orthonormalsystem bilden.
- Wie gut kann man die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 2(L-x) & \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad (2)$$

durch die ersten N Funktionen $|u_n\rangle$ approximieren? Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar für $N = 1$, $N = 5$ und $N = 10$, z.B. mit Mathematica.

- Es liegt nahe, zu vermuten, daß die Funktionen $|u_n\rangle$ eine Basis im Vektorraum $C^0([0, L], \mathbb{C}, f(0) = f(L) = 0)$ bilden. Wie könnte man das beweisen?

6.2 Orts- und Impulsoperatoren

Man betrachte die beliebig oft differenzierbaren und quadratintegrablen Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.

Sind die Operatoren \tilde{x} und \tilde{p} auf diesem Raum hermitesch? Gehen Sie dabei von den folgenden Definitionen aus:

$$\langle f | \tilde{x} | g \rangle := \int_0^L dx f^*(x) x g(x) \quad (3)$$

und

$$\langle f | \tilde{p} | g \rangle := \int_0^L dx f^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} g(x) \quad (4)$$

6.3 Ehrenfesttheorem

Für die Zeitableitung des Erwartungswertes eines Operators \tilde{B} ergibt sich nach Vorlesung

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \tilde{B} | \Psi(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi(t) | [\tilde{B}, \tilde{H}] | \Psi(t) \rangle + \langle \Psi(t) | \frac{\partial}{\partial t} \tilde{B} | \Psi(t) \rangle. \quad (5)$$

- a. Berechnen Sie für den Hamiltonoperator

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{p}^2}{2m} + V(\tilde{x}) \quad (6)$$

die Zeitableitungen von $\langle \Psi(t) | \tilde{x} | \Psi(t) \rangle$ und $\langle \Psi(t) | \tilde{p} | \Psi(t) \rangle$. Nutzen Sie die Kommutatorrelation $[\tilde{x}, \tilde{p}] = i\hbar$ sowie die Ortsdarstellung des Impulses.

Vereinfachen Sie die rechten Seiten möglichst weit und interpretieren Sie diese im Lichte der klassischen Mechanik.

- b. Schauen Sie in der Literatur nach, was man unter *Ehrenfesttheorem* versteht. Es ist gut möglich, dass das nicht ganz gleichlautend ist.
- c. Wie drückt Ehrenfest sich selbst in seinem Artikel *Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik*, Zeitschrift für Physik **45** (1927) 455-457, aus? Sie können den Artikel im Original auf der Seite von Springer herunterladen: <http://link.springer.com/article/10.1007%2F01329203>