Aufgabenblatt 3

3.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Spinoperatoren

Der Operator $\underset{\sim}{s}_z$ hat für ein Teilchen mit Spin $s = 1/2$ die Eigenzustände $\{\,|\,s_z\,+\rangle,\ |\,s_z\,-\rangle\}$. Die Basiszustände bilden eine Orthonormalbasis und seien stets in dieser Reihenfolge durchnummeriert. Alle Ergebnisse dieser Aufgabe können Sie anhand Ihrer Mitschrift überprüfen.

a. Der Operator $\underset{\sim}{s}_x$ hat bezüglich dieser Basis die Darstellung

$$\underset{\sim}{s}_x \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{1}$$

Schreiben Sie $\underset{\sim}{s}_x$ als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts auf.

b. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix (1). Stellen Sie die Eigenvektoren als Linearkombination der Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{s}_z$ dar.

c. Stellen Sie die Eigenvektoren von $\underset{\sim}{s}_z$ als Linearkombination der Eigenvektoren von $\underset{\sim}{s}_x$ (1) dar.

d. Die Vertauschungsrelationen für Spins lautet

$$\left[\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y\right] = i\,\hbar\,\underset{\sim}{s}_z \ . \tag{2}$$

In diesem Ausdruck können die Indizes zyklisch vertauscht werden, d.h. $x \to y \to z \to x$. Da Sie die Darstellungen von $\underset{\sim}{s}_z$ und $\underset{\sim}{s}_x$ kennen, können Sie jetzt in einer Basis Ihrer Wahl (ich empfehle die Eigenbasis zu $\underset{\sim}{s}_z$) die Darstellung von $\underset{\sim}{s}_y$ berechnen. Schreiben Sie $\underset{\sim}{s}_y$ als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts der Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{s}_z$ auf.

3.2 Erwartungswerte und Meßwahrscheinlichkeiten für Spinkomponenten

Durch eine spezielle Stern-Gerlach-Apparatur sei das System im Zustand

$$|\,\alpha\,\rangle \quad = \quad 0.6\,|\,s_z\,+\rangle + 0.8\,|\,s_z\,-\rangle \tag{3}$$

präpariert.

a. Wie lautet der Erwartungswert des Operators $\underset{\sim}{s}_z$ bezüglich $|\,\alpha\,\rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von $\underset{\sim}{s}_z$ die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?

b. Wie lautet der Erwartungswert des Operators $\underset{\sim}{s}_y$ bezüglich $|\,\alpha\,\rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von $\underset{\sim}{s}_y$ die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?

c. Konstruieren Sie eine Stern-Gerlach-Apparatur, mit der der Zustand $|\,\alpha\,\rangle$ präpariert werden kann. Begründen Sie.

3.3 Verkanteter Stern-Gerlach-Versuch

Ein etwas schusseliger Experimentator (Männer! Musste wahrscheinlich schnell gehen wegen der Champions-League!) orientiert seinen Stern-Gerlach-Versuch statt in z-Richtung entlang $\theta = 30, \phi = 30$, wobei θ und ϕ die üblichen Kugelkoordinaten sind, d.h. θ misst die Auslenkung von der positiven z-Achse und ϕ den Drehwinkel in der $x-y$-Ebene entgegen dem Uhrzeigersinn. Der Eingangsstrahl sei im Zustand $\mid s_z \, + \rangle$ präpariert.
Welche Eigenwerte misst der Experimentator und mit welchen Wahrscheinlichkeiten? Und wie geht das Endspiel Bayern gegen Dortmund aus?

3.4 Unbestimmtheitsrelation

Das Spinsystem ($s = 1/2$) sei im Zustand $\mid \phi \rangle = \mid s_z \, + \rangle$.

a. Berechnen Sie

$$\langle \left(\underset{\sim}{\Delta s_x} \right)^2 \rangle \quad = \quad \langle \underset{\sim}{s}_x^2 \rangle - \langle \underset{\sim}{s}_x \rangle^2 \, . \tag{4}$$

b. Überprüfen Sie, ob die Unbestimmtheitsrelation für zwei Observable $\underset{\sim}{A}$ und $\underset{\sim}{B}$ erfüllt ist, wenn $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{s}_x$ und $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{s}_y$ sowie $\mid \phi \rangle = \mid s_z \, + \rangle$.

c. Führen Sie die gleiche Überprüfung für $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{s}_x$ und $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{s}_y$ sowie $\mid \phi \rangle = \mid s_x \, + \rangle$ durch.