Aufgabenblatt 2

2.1 Stern-Gerlach-Versuch mit polarisiertem Licht

Wiederholen Sie für sich die aus der Vorlesung bekannte Analogie zwischen den Stern-Gerlach-Experimenten mit Magnetfeldern in z- und x-Richtung sowie Polarisatoren in x- bzw. y-Richtung sowie in die um 45° geneigten Richtungen x' und y'.
Zirkular polarisiertes Licht kann nun als Analogon für den dritten möglichen Stern-Gerlach-Versuch, in y-Richtung, dienen. Man unterscheidet dabei die beiden Polarisationen im Uhrzeigersinn (rechts-zirkular) und entgegen dem Uhrzeigersinn (links-zirkular).

a. Geben Sie die Formel für die elektrische Feldstärke von zirkular polarisiertem Licht an, welches in z-Richtung fortschreitet. Stellen Sie das Ergebnis mittels Phasenverschiebung dar und geben Sie ebenfalls an, wie die komplexe Schreibweise lautet. Erklären Sie die Formeln kurz.

b. Welches Ergebnis erhält man, wenn das Licht in einem horizontalen Polarisator polarisiert wird (x-Richtung) und anschließend einen Filter für links-zirkular polarisiertes Licht durchläuft? Welches Ergebnis würde man bei einem Filter für rechts-zirkular polarisiertes Licht erhalten? Begründen Sie.

c. Stellen Sie sich jetzt vor, das Licht durchläuft zuerst einen horizontalen Polarisator (x-Richtung), sodann einen Polarisator für rechts-zirkular polarisiertes Licht und wird dann zum einen mit einem vertikalen Filter (y-Richtung) zum anderen mit einem horizontalen Filter (x-Richtung) analysiert. Erklären Sie die Ergebnisse.

2.2 Projektionen

Wir betrachten eine Projektion in einem dreidimensionalen Vektorraum, der durch die orthonormalen Basisvektoren $\{\,|\,1\,\rangle,\ |\,2\,\rangle,\ |\,3\,\rangle\}$ aufgespannt wird. Wiederholen Sie zur Vorbereitung die Definition für einen Projektionsoperator.

a. Überprüfen Sie, ob die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ein Projektor ist. Welche Eigenschaft der Projektoren haben Sie ausgenutzt?

b. Beschreiben Sie verbal und mathematisch, worauf der Projektor projiziert.

c. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A. Erklären Sie, warum gerade die von Ihnen gefundenen (recht speziellen) Eigenwerte auftreten.

2.3 Hermitesche Operatoren

Wiederholen Sie für sich die Definition für einen hermiteschen Operator.

a. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind.

b. Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sind. Dazu können Sie die schon berechnete Differenz benutzen.

c. Geben Sie einen physikalischen Grund an, warum es physikalisch konsistent ist, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind.

2.4 Zusatzaufgabe: Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Diese Matrix kann numerisch diagonalisiert werden. Allerdings kann man an der Struktur der Matrix erkennen, dass sich die Diagonalisierung vereinfachen läßt. Können Sie sich vorstellen wie? Begründen Sie Ihre Idee.