

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2013 012	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	---------------------------------------	---

**Bitte jede Aufgabe (1.2, 1.2, ...) auf einem neuen Blatt.
Name, Vorname und Matrikelnummer jeweils nicht vergessen.**

1 Wissen

1.1 Quantenmechanik (35 P.)

- Wie lauten die stationäre und die zeitabhängige Schrödingergleichung (2 P.)?
- Ein System sei im Zustand $|\phi\rangle$ präpariert. Die Observable \hat{A} soll gemessen werden. Erklären Sie kurz die Messaktiome der Quantenmechanik sowie die Begriffe Erwartungswert und Messwert (5 P.)?
- Durch eine spezielle Stern-Gerlach-Apparatur sei das Spin-1/2-System im Zustand $|\alpha\rangle = 0.6 |s_z +\rangle + 0.8 |s_z -\rangle$ präpariert. Wie lautet der Erwartungswert des Operators \hat{s}_z bezüglich $|\alpha\rangle$ (5 P.)?
- Beweisen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind und dass die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sind (5 P.).
- Wie lauten die Kommutatorrelationen und Eigenwertgleichungen für Drehimpulse? Welche Werte können die zugehörigen Quantenzahlen annehmen (5 P.)?
- Wie lautet die allgemeine Unbestimmtheitsrelation? Erläutern Sie die vorkommenden Größen (3 P.).
- Wie lauten der Hamiltonoperator und die Energieeigenwerte des eindimensionalen harmonischen Oszillators (3 P.)?
- Wie lauten der Hamiltonoperator und die Energieeigenwerte des Wasserstoffproblems? Geben Sie die Entartung der Energieniveaus an, wenn man den Spin nicht berücksichtigt (5 P.)?
- Wie lauten die Korrekturen der Energieeigenwerte in erster Ordnung nichtentarteter Störungstheorie (2 P.)?

1.2 Spezielle Relativitätstheorie (10 P.)

- Wie lauten die beiden Postulate der Speziellen Relativitätstheorie (4 P.)?
- Wie lautet die Lorentz-Transformation (6 P.)?

2 Können

2.1 Unendlich hohes Kastenpotential (15 P.)

- Leiten Sie die Energieeigenwerte und -eigenfunktionen des unendlich hohen Kastenpotentials her. Stellen Sie zuerst den Hamiltonoperator auf, definieren Sie Bereiche und geben Sie die Randbedingungen an (10 P.).
- Beschreiben Sie formelmäßig die Zeitentwicklung eines beliebigen Zustandes $|\Psi(t)\rangle$. Wie lautet allgemein die Spektraldarstellung des Zeitentwicklungsoperators? Wie lautet die allgemeine zeitabhängige Lösung $|\Psi(t)\rangle$, wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\Psi(0)\rangle$ befunden hat (5 P.)?

2.2 Gaußsches Wellenpaket (15 P.)

Die Wellenfunktion des Gaußschen Wellenpakets in einer Raumdimension lautet

$$\langle x | \phi \rangle = c \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{2a} + i \frac{x p_0}{\hbar} \right\} . \quad (1)$$

a , x_0 und p_0 sind dabei reell, $a > 0$.

- Bestimmen Sie die Normierungskonstante c (5 P.).
- Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortsoperators und des Impulsoperators, d.h. den mittleren Ort und den mittleren Impuls (10 P.).

2.3 Grundzustand im H-Atom (15 P.)

- Lösen Sie die Eigenwertgleichung für das Coulombpotential direkt mit dem Ansatz (10 P.).

$$\phi(r) = e^{-\kappa r} , \quad \kappa > 0 . \quad (2)$$

- Bestimmen Sie die Normierungskonstante (5 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Wechselwirkung zwischen drei Spins (20 P.)

Wir betrachten drei Spins mit je $s = 1$. Ihre effektive Spin-Spin-Wechselwirkung werde durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben:

$$\underline{H} = -\frac{2J}{\hbar^2} \left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 \right). \quad (3)$$

- Bestimmen Sie die Energieeigenwerte dieses Hamiltonoperators sowie deren Entartung. Begründen Sie Ihr Vorgehen (10 P.).
- Nehmen Sie jetzt die Wechselwirkung mit einem äußeren homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ hinzu:

$$\underline{H}_{\text{Zeeman}} = \frac{g \mu_B}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{S}. \quad (4)$$

Stellen Sie die Energieeigenwerte des Gesamthamiltonoperators als Funktion des äußeren Feldes B graphisch dar (10 P.).

3.2 Spinpräzession (25 P.)

Ein Spin mit Spinquantenzahl s bewege sich im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

- Geben Sie den Hamiltonoperator und seine Spektraldarstellung an (5 P.).
- Zur Zeit $t = 0$ laute der Erwartungswert des Spinoperators

$$\langle \Psi(0) | \vec{s} | \Psi(0) \rangle = \vec{s}_0. \quad (5)$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von \vec{s} für beliebige Zeiten t (20 P.).

Es können 135 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 65 \Rightarrow 3.3$
- $66 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.0$
- $71 \leq P \leq 75 \Rightarrow 2.7$
- $76 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$