

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Kernphysik WS 2013/2014	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	----------------------------	---

Aufgabenblatt 11

11.1 Eindimensionales Schalenmodell für Fermionen

Selbstverständlich sind Atomkerne dreidimensionale Objekte. Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden aber einen eindimensionalen Kern. Die vier eindimensionalen Nukleonen sollen durch eine Slaterdeterminante beschrieben werden. Sie befinden sich je zu zweit in den untersten beiden Niveaus eines harmonischen Oszillatorpotentials, für das $\hbar\omega = 16 \text{ MeV}$ ist. Dabei habe je ein Nukleon pro Niveau „Spin rauf“ und das andere „Spin runter“. Die Einteilchenbasis lautet also $|n, m_s\rangle$; dabei benennt n das Oszillatorniveau und m_s die magnetische Quantenzahl.

Die Masse der Nukleonen sei $m = 939 \text{ MeV}/c^2$. Sie können zur Auswertung z.B. ein Programm wie Mathematica benutzen.

- Stellen Sie die Slaterdeterminante auf und normieren Sie diese.
- Stellen Sie die Einteilchendichte als Funktion von x dar.
- Nehmen Sie jetzt an, wir suchten den Grundzustand für N Nukleonen im Potential eines dreidimensionalen Oszillators der Frequenz ω . Die Anzahl der Protonen sowie der Neutronen sei jeweils $N/2$. Berechnen Sie die Energieeigenwerte als Funktion von N für gerade N (bis $N = 200$) und stellen Sie diese graphisch dar.
- Zusatzaufgabe:** Untersuchen Sie diese Kurve. Differenzieren Sie diese einmal und zweimal numerisch. Was fällt Ihnen auf? Wie könnte man dies interpretieren?

11.2 Eindimensionale Kerne

In dieser Aufgabe soll exemplarisch erarbeitet werden, wie man Eigenzustände von Kernen berechnen kann. Dazu wird ein einfaches Zweiteilchenpotential, wie es aus den Arbeiten von Brink und Boeker bekannt ist, verwendet. Es hat die folgende Form:

$$V(x_{12}) = V_1 \exp \left[- \left(\frac{x_{12}}{r_1} \right)^2 \right] + V_2 \exp \left[- \left(\frac{x_{12}}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (1)$$

Dabei ist x_{12} der Relativabstand. Die Konstanten seien wie folgt gewählt:

$$V_1 = 100 \text{ MeV} \quad (2)$$

$$r_1 = 0.7 \text{ fm} \quad (3)$$

$$V_2 = -50 \text{ MeV} \quad (4)$$

$$r_2 = 1.4 \text{ fm} . \quad (5)$$

Atomkerne sind selbstverständlich dreidimensionale Objekte. Durch die dann auftretenden Volumenintegrale würde die Aufgabe aber numerisch so aufwändig, dass Sie diese nicht mehr lösen könnten. Wer mag, kann es jedoch versuchen.

Sie können zur Auswertung z.B. ein Programm wie Mathematica benutzen.

- a. Stellen Sie das Potential graphisch dar.
- b. Berechnen Sie die klassische Bindungsenergie für zwei, drei oder vier Teilchen in drei Raumdimensionen.
- c. Überlegen Sie sich, wie man approximative Energieeigenwerte finden kann, wenn man als Einteilchenbasis die Eigenzustände eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit $\hbar\omega = 16 \text{ MeV}$ nutzt. Die Masse der Nukleonen sei $m = 939 \text{ MeV}/c^2$.
- d. Solange man nur unterscheidbare Nukleonen hat, also bei einigen sehr kleinen Kernen, kann man auf die Antisymmetrisierung verzichten und mit Produktzuständen rechnen. Dies ist z.B. beim Deuteron der Fall, das aus einem Proton und einem Neutron besteht sowie beim ^4He -Kern, der aus einem Proton mit Spin up, einem Proton mit Spin down sowie den entsprechenden Neutronen besteht.

Berechnen Sie die approximativen Energieeigenwerte für diese beiden Konfigurationen.

- e. Das Ergebnis wird von der Anzahl der mitgenommenen Einteilchenzustände abhängen. Wieviel, denken Sie, müsste man mitnehmen? Wieviel können Sie auf Ihrem Computer mitnehmen?
- f. Hängt das Ergebnis von ω ab? Was wäre, wenn man alle Einteilchenzustände mitnehmen würde?