

# Kernphysik

Prof. Jürgen Schnack

TEXed by Johnny

Bei Fragen oder Fehler: [jbrinkro@techfak](mailto:jbrinkro@techfak).

10. Februar 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Aufbau der Atomkerne . . . . .	3
1.2	Eigenschaften von Proton und Neutron . . . . .	3
1.3	Größe und Form der Atomkerne . . . . .	4
1.3.1	Einschub: Vielteilchenquantenmechanik . . . . .	4
1.3.2	Einschub: Streuung und Rutherfordscher Streuquerschnitt . . . . .	6
1.4	Masse und Bindungsenergie der Atomkerne . . . . .	7
1.5	Quantenzahlen des Kerns . . . . .	9
1.5.1	Einschub: Gekoppelte Drehimpulse . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Radioaktivität</b>	<b>12</b>
2.1	Zerfallsarten . . . . .	13
2.2	Messgrößen . . . . .	14
2.3	Zerfallsgesetz, Zerfallsreihen . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Kernspaltung und Kernfusion</b>	<b>16</b>
3.1	Kernspaltung . . . . .	16
3.2	Transmutation . . . . .	19
3.3	Kernfusion . . . . .	19
3.4	Nukleare Astrophysik . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Symmetrien und Erhaltungssätze</b>	<b>22</b>
4.1	Symmetrien in der klassischen Mechanik . . . . .	22
4.2	Symmetrien in der Quantenmechanik . . . . .	23
4.2.1	Einschub: Symmetrien und Gruppen . . . . .	24
4.3	Symmetrien in der Kernphysik? . . . . .	24
4.4	PCT . . . . .	25
4.4.1	Parität . . . . .	26
4.4.2	Ladungskonjugation $C$ . . . . .	28
4.4.3	Die Zeitumkehr . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Kernmodelle</b>	<b>29</b>
5.1	Vielteilchensysteme: Fermionen und Bosonen . . . . .	29
5.2	Kanonisches Ensemble nichtwechselwirkender Fermionen oder Bosonen in eindim. harmonischen Oszillator	31
5.3	Besetzungszahldarstellung . . . . .	32
5.4	Großkanonisches Ensemble idealer Quantengase . . . . .	33
5.5	Das ideale Fermigas . . . . .	34
5.6	Der Kern als Fermigas . . . . .	35
5.7	Das Schalenmodell . . . . .	36
5.8	Schalenmodell mit Spin-Bahn-Kopplung . . . . .	37
5.9	Deformierte Einteilchenpotentiale . . . . .	38
5.10	Die volle Lösung – erster Versuch . . . . .	38
5.11	Exotische Kerne . . . . .	38
5.12	Das Deuteron ( ${}^2H \hat{=} d$ ) . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Neutronensterne</b>	<b>39</b>
6.1	Eine kühne Extrapolation von Nicolas Borghini . . . . .	39
6.2	Entstehung und Eigenschaften von Neutronensternen . . . . .	40

# 1 Einführung

## 1.1 Aufbau der Atomkerne

- Z Protonen
- N Neutronen
- A Nukleonen ( $A = Z + N$ )

Protonenzahl = el. Ladung; bestimmt den Elementnamen

- $Z = 1$  Wasserstoff (H)
- $Z = 2$  Helium (He)
- $Z = 3$  Lithium (Li)
- $Z = 102$  Nobelium (No)
- $Z = 110$  Darmstadtium (Ds)
- $Z = 116$  Livermorium (Lv)

113, 115, 117, 118 noch nicht benannt

neutrale Atome: Elektronenzahl = Protonenzahl, damit chem. Eigenschaften indirekt mitbestimmt

Neutronenzahl N gibt an, um welches Isotop eines Elementes es sich handelt. Bezeichnung:  ${}^A_Z X_N$ , z.B.  ${}^{136}_{54} Xe_{82} \cong {}^{136} Xe$

Die wichtigsten Eigenschaften werden in der (karlsruher) Nuklidkarte aufgeführt.

Isotope: Nuklide mit gleichem Z

Isotone: Nuklide mit gleichem N

Isobare: Nuklide mit gleichem A

Spiegelkerne:  $(Z_1, N_1) \leftrightarrow (Z_2=N_1, N_2=Z_1)$

Isomere: Kerne in langlebigen angeregten Zuständen

## 1.2 Eigenschaften von Proton und Neutron

	Proton	Neutron	
Masse	$1,6726 \cdot 10^{-27} \text{kg} = 938,272 \frac{\text{MeV}}{c^2}$	$1,6749 \cdot 10^{-27} \text{kg} = 939,566 \frac{\text{MeV}}{c^2}$	$m_n - m_p = 1,3 \frac{\text{MeV}}{c^2}$
el. Ladung	$+e_0$	0	
Spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Fermionen
gyromag. Faktor g	5,5856	-3,8261	$\mu = \mu_N g_s$
Stabilität freier Nukl.	$T_{\frac{1}{2}} > 10^{30} \text{a}$	$T_{\frac{1}{2}} = 10,3 \pm 0,1 \text{min}$ $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	
Radius Ladungsvert.	$0,81 \pm 0,1 \text{fm}$	$0 \pm 0,1 \text{fm}$	
Radius magn. Moment	$0,8 \pm 0,03 \text{fm}$	$0,79 \pm 0,15 \text{fm}$	

**Warum gibt es stabile Kerne?** Erklärung:

1.  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
2. Energie von p < Energie von n
3. Endzustand schon besitzt (Pauliprinzip)

Nukleonen, d.h. p & n, sind ausgedehnte Objekte und haben eine innere Struktur.

Proton:  $|\text{Proton}\rangle$  „ $|uud\rangle$ “; sym. im Ort, sym im Spin

sym. im „flavour“-Freiheitsgrad und antisym. im “color“-Freiheitsgrad

Neutron:  $|\text{Neutron}\rangle = |\text{Proton, aber } u \text{ \& } d \text{ vertauscht}\rangle$  „ $|ddu\rangle$ “

Kurzübersicht Elementarteilchen:	Generation	Leptonen		Quarks		
	I	e	$\nu_e$	u	d	
	II	$\mu$	$\nu_\mu$	c	s	charm/ strange
	III	$\tau$	$\nu_\tau$	t	b	top/bottom
		$-e_0$	0	$\frac{2}{3}e_0$	$-\frac{1}{3}e_0$	

**Bem.:** Quarks tragen Farbladung (color): rot, grün, blau

→ Hardronen ↗ Baryonen: farbneutral (r,g,b)  
 ↘ Mesonen: (r,  $\bar{r}$ ), (g,  $\bar{g}$ ), (b,  $\bar{b}$ )

Alle Elementarteilchen (Leptonen & Quarks) haben  $s = \frac{1}{2}$  und sind Fermionen.

Wechselwirkungen	Austauschteilchen	Reichweite
el-mag.	Photon $\gamma$	$\infty \left(\frac{1}{r}\right)$
schwach	$W^\pm, Z^0$	kurz
stark	Gluonen	kurz
Gravitation	Graviton?	$\infty \left(\frac{1}{r}\right)$

Die Austauschteilchen sind Bosonen.

Protonen & Neutronen sind zusammengesetzte Teilchen; es existieren angeregte Zustände.

Nukleonen liegen als  $p$  &  $n$  vor, Anregungen sind energetisch zu hoch!

### 1.3 Größe und Form der Atomkerne

Woher weiß man eigentlich, wie groß Atomkerne sind?

→ Streuexperimente

Überlegung:

1. Coulombabstoßung
2. sei  $b$  fest:  $E_{\text{kin}} \uparrow$ , dann  $\vartheta \downarrow$
3. sei  $E_{\text{kin}}$  fest:  $b \downarrow$ , dann  $\vartheta \uparrow$

Wenn jetzt  $\vartheta$  fest → betrachte alle Kombinationen aus  $b$  &  $E_{\text{kin}}$ , die zum selben  $\vartheta$  führen.

⇒  $R \approx 1,2 \text{ fm } A^{\frac{1}{3}}$

**Bem.:**

- $\vartheta$  fest: ex. Zusammenhang zwischen  $E_{\text{kin}}$  und Stoßparameter  $b$
- aus Abweichung von Rutherford'scher Streuformel kann auf Kerngröße geschlossen werden
- Exp. von Geiger Marxden, Rutherford und Chadwick

→ Atom hat kleinen kompakten Kern, der fast die gesamte Masse des Atoms trägt. Elektronen befinden sich in der Hülle

Kernradius  $R \approx 1,2 \text{ fm } A^{\frac{1}{3}}$ , Volumen ist proportional zu  $A$

→ Nukleon ist harte Kugel, Kern ist Packung (Kugel)

Die Dichteverteilung der Kerne ist aus (n- oder  $e^-$ -) Streuexperimenten bekannt.

Die Dichteprofile können in guter Näherung durch folgende Funktionen wiedergegeben werden:

klein: $A \lesssim 40$	$\rho(r) \propto \exp\left\{-\frac{r^2}{2a^2}\right\}$	Gauß-Verteilung	} basiert auf keiner Theorie, sondern auf exp. Daten
groß: $A \gtrsim 40$	$\rho(r) \propto \frac{1}{1+\exp\left\{\frac{r-R}{a}\right\}}$	Fermi-Verteilung	

#### 1.3.1 Einschub: Vielteilchenquantenmechanik

Wiederholung:

- Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , ONB  $\{|\psi_n\rangle\}$
- Zustände  $|\psi\rangle = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n | \psi\rangle$
- Observable  $Q = Q^+$

**Bsp.:** mittlerer Ort  $\langle \vec{x} \rangle = \langle \psi | \vec{x} | \psi \rangle$  mit  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle \langle \psi | \vec{x} \rangle = \psi^*(x)\psi(x) = |\psi(x)|^2$$

**Bsp.:** 1-Dim  $P([x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x)$

mittlerer Ort II:  $\langle \vec{x} \rangle = Tr(\vec{x} \rho)$  mit  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$

$\rho$  Dichteoperator/ Dichtematrix:  $\rho(\vec{x}, \vec{x}') = \langle \vec{x} | \psi \rangle \langle \psi | \vec{x}' \rangle$

Ausdehnung:  $\langle (\vec{x} - \langle \vec{x} \rangle)^2 \rangle = \langle \vec{x}^2 - 2\vec{x} \langle \vec{x} \rangle + \langle \vec{x} \rangle^2 \rangle = \langle \vec{x}^2 \rangle - 2\langle \vec{x} \rangle^2 + \langle \vec{x} \rangle^2 = \langle \vec{x}^2 \rangle - \langle \vec{x} \rangle^2$

**Def.:**  $r = \sqrt{\langle \vec{x}^2 \rangle - \langle \vec{x} \rangle^2}$

## Vielteilchen-QM

**Bsp.:** zwei Teilchen: Basis  $\{|\varphi_k\rangle \otimes |\varphi_l\rangle\}$

z.B. Einteilchenbasis ist ONB des harm. OSZ.  $|n\rangle$

→ Produktbasis  $\{|n\rangle \otimes |m\rangle\}$ ; allg. Zweiteilchenzustand:  $|\psi\rangle = \sum_{m,n} c_{nm} |n\rangle \otimes |m\rangle$

→ Zustände leben in einem Produktraum  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$

Operatoren:

- es gibt Einteilchen-Op., die auf dem Einteilchenhilbertraum definiert sind
- es gibt Mehrteilchenop. (hauptsächlich Zweiteilchen), die auf Produkträumen definiert sind

**Bsp.:** kin. Energie  $\tilde{T} = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_2^2}{2m_2} \rightarrow$  Einteilchenop.  $\tilde{t} = \frac{\tilde{p}^2}{2m} = \tilde{t} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \tilde{t} (+ \dots)$

**Bsp.:** Sei  $|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \psi | \tilde{T} | \psi \rangle &= (\langle \psi_1 | \otimes \langle \psi_2 |) (\tilde{t} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \tilde{t}) (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) \\ &= (\langle \psi_1 | \otimes \langle \psi_2 |) \tilde{t} \otimes \mathbb{1} (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) + (\langle \psi_1 | \otimes \langle \psi_2 |) \mathbb{1} \otimes \tilde{t} (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) \\ &= \langle \psi_1 | \tilde{t} | \psi_1 \rangle \underbrace{\langle \psi_2 | \mathbb{1} | \psi_2 \rangle}_{=1} + \langle \psi_1 | \mathbb{1} | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | \tilde{t} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \tilde{t} | \psi_1 \rangle + \langle \psi_2 | \tilde{t} | \psi_2 \rangle \end{aligned}$$

**Schwerpunkt:**  $\vec{x}_{cm} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{x}_i = \frac{1}{N} \{ \vec{x} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \dots \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{x} \otimes \mathbb{1} \dots \mathbb{1} + \dots \}$

$\vec{R}_{cm} = \langle \psi | \vec{x}_{cm} | \psi \rangle$

**Ausdehnung:**  $r_{rms}^2 = \langle \psi | \frac{1}{N} \sum_i (\vec{x}_i - \vec{R}_{cm}) | \psi \rangle$

**Bem.:**

- .  $r_{rms}$  misst Ausdehnung der Wahrscheinlichkeitsdichte
- . wahre Dichte = Faltung aus WK-Dichte und Dichteprofil des Nukleons

$$\Rightarrow r_{Kern}^2 = r_{rms}^2 + r_n^2$$

Dichten:

**i** Einteilchendichte  $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N | \psi \rangle = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}') &= \frac{1}{N} \left\{ \int d^3 \vec{x}_2 \dots d^3 \vec{x}_N \langle \vec{x}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N | \psi \rangle \langle \psi | \vec{x}', \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N \rangle \right. \\ &\quad + \int d^3 \vec{x}_1 d^3 \vec{x}_3 \dots d^3 \vec{x}_N \langle \vec{x}_1, \vec{x}, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_N | \psi \rangle \langle \psi | \vec{x}_1, \vec{x}', \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_N \rangle \\ &\quad \left. + \dots + \int d^3 \vec{x}_1 \dots d^3 \vec{x}_{N-1} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{N-1}, \vec{x} | \psi \rangle \langle \psi | \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{N-1}, \vec{x}' \rangle \right\} \end{aligned}$$

Wenn  $|\psi\rangle$  Produktzustand, d.h.  $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle$

$$\Rightarrow \rho^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{N} \sum_i \langle \vec{x} | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \vec{x}' \rangle$$

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

$$\int d^3\vec{x} \rho^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}) = 1$$

Wahrscheinlichkeitsdichte (ein Teilchen anzutreffen):  $\rho^{(1)}(\vec{x}) = \rho^{(1)}(\vec{x}, \vec{x})$

## ii Zweiteilchendichte

$$\rho^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}', \vec{y}') = \frac{2}{N(N-1)} \left\{ \int d^3\vec{x}_3 \dots d^3\vec{x}_N \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_N | \psi \rangle \langle \psi | \vec{x}', \vec{y}', \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_N \rangle + \dots \right.$$

$\vec{x}, \vec{y}$  bzw.  $\vec{x}', \vec{y}'$  an den Positionen aller möglichen geordneter Paare }

Wenn  $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle$

$$\rho^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}', \vec{y}') = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j} \langle \vec{x}, \vec{y} | \psi_i \psi_j \rangle \langle \psi_i \psi_j | \vec{x}', \vec{y}' \rangle$$

$$|\psi_i \psi_j\rangle = |\psi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle \quad \langle \vec{x}, \vec{y} | \psi_i \psi_j \rangle = \langle \vec{x}, \psi_i | \vec{y}, \psi_j \rangle$$

$\rho^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}', \vec{y}') \hat{=} \rho^{(2)}(\vec{x}, \vec{y})$  bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte, ein Teilchen bei  $\vec{y}$  anzutreffen, wenn schon eins bei  $\vec{x}$  ist.

**Bem.:**  $\rho^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \rho^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}_{rel})$

### 1.3.2 Einschub: Streuung und Rutherford'scher Streuquerschnitt

**Grundidee:** Die einlaufenden Teilchen stellen eine homogene Stromdichte  $\vec{j}_{in}$  dar, d.h. homogen auf Längenskala der Streuzentren.

**Detektor:** Der Detektor detektiert die Produkte unter einem Winkel  $\vartheta$  im Abstand  $R$ .

#### Produkte:

1. elastische Streuung:

- Produkt: ursprüngliches, aber abgelenktes Teilchen

2. inelastische Streuung:

- Produkte= alle möglichen Reaktionsprodukte, z.B. auch neue Teilchen, Kernbruchstücke, oder ursprüngliches Teilchen, aber mit Anregung des Kerns

**Ziel:** Man möchte quantitativ darstellen, wie viele Ereignisse unter einem Winkel  $\vartheta$  eintreffen. Das ist eine relative Größe, die auf die einfallende Stromdichte bezogen ist.

**Def:** Differentielles Streuquerschnitt (Wirkungsquerschnitt)

$$\frac{d\delta}{d\Omega}(\vartheta) = \frac{\text{Zahl der in das Raumwikelement } d\Omega(\vartheta, \varphi) \text{ gestreuten Teilchen pro Zeit (=Strom)}}{\text{einfallende Stromdichte}}$$

**Bem:** Einheit  $\frac{1}{\text{m}^2 \text{s}} = \text{m}^2$ , in der Kernphysik nutzt man **Barn**  $1b = 10^{-28} \text{m}^2 = 100 \text{fm}^2$

Im Prinzip ist  $\frac{d\delta}{d\Omega}$  eine Fkt. von  $\vartheta$  und  $\varphi$ , aber viele Streuprodukte sind Kugelsym., deshalb keine Abhängigkeit von  $\varphi$

$$\text{Relation einfallend: } dN_{in} = j_{in} dA dt$$

$$\text{Relation ausfallend: } dN_{out} = j_{out} r^2 d\Omega dt$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta}{d\Omega}(\vartheta) = \frac{j_{out} r^2}{j_{in}}$$

**Def:** Totaler Wirkungsquerschnitt:  $\delta_{tot} = \oint \left( \frac{d\delta}{d\Omega} \right) d\Omega$   
 Rutherford'scher Streuquerschnitt

- $dA = b db d\varphi$
- $dN_{in} = j_{in} b d\varphi db dt$
- $dA' = -r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$
- $dN_{out} = -j_{out} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dt$

„“ von  $\frac{d\vartheta}{db} < 0$ , zu  $db > 0$  gehört  $d\vartheta < 0$

Streuung elastisch, d.h. u.a. Energie und Teilchenzahl erhalten

$$dN_{in} = dN_{out} \Leftrightarrow j_{in} b db = -j_{out} r^2 \sin \vartheta d\vartheta$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta}{d\Omega} = \frac{j_{out} r^2}{j_{in}} = -\frac{b db}{\sin \vartheta d\vartheta}$$

gilt für beliebige Wechselwirkungen!

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b db}{\sin \vartheta d\vartheta}$$

jetzt: Streuung am Coulomb-Potential; (o.B.d.A.) Annahme, dass das Steuzentrum eine sehr viel größere Masse hat, sich nicht bewegt und im Ursprung sitzt.

$$\vec{F} = \frac{ZZ'e e \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Anfangszustand:  $t \rightarrow -\infty : \varphi = \pi, v_y = 0$
- Endzustand:  $t \rightarrow +\infty : \varphi = \vartheta, v_{out} \sin \vartheta$

Erhaltungssätze:

- Energie:  $\frac{1}{2} m v_{in}^2 = \frac{1}{2} m v_{out}^2 \Rightarrow v_{in} = v_{out} = v$
- Drehimpuls:
  - $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \parallel \vec{e}_z$
  - $L_{in}^z = m b v \cdot (-1)$  Anfangszustand
  - $L = m R^2 \omega = m r(t) \cdot r(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$  während der Streuung
  - $\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{b v}{r^2}$
  - $\frac{d v_y}{d\varphi} = \frac{d v_y}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{\frac{d v_y}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = -\frac{Z Z' e^2}{4\pi\epsilon_0 m b v} \sin \varphi$
- mit Newton 2:  $\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$
- $F_y = m \frac{d v_y}{dt} = \frac{Z Z' e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \varphi$

Integrieren von  $\varphi = \pi$  bis  $\varphi = \vartheta$

$$v_y(\varphi = \vartheta) - v_y(\varphi = \pi) = v \sin \vartheta - 0 = +\frac{Z Z' e^2}{4\pi\epsilon_0 m b v} \cos \varphi \Big|_{\pi}^{\vartheta} = \frac{Z Z' e^2}{4\pi\epsilon_0 m b v} (1 + \cos \vartheta)$$

$$b = \frac{Z Z' e^2}{4\pi\epsilon_0 m b v^2} \cot \frac{\vartheta}{2} \text{ gesuchte Relation zwischen } b \text{ und } \vartheta$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16} \left( \frac{Z Z' e^2}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2} m v^2} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{\vartheta}{2})^4} \text{ Rutherford'sche Streuformel}$$

## 1.4 Masse und Bindungsenergie der Atomkerne

Idee: gebundenes System hat geringere Energie als isolierte Konstituenten

**Def.:**  $E_{\frac{B}{c^2}} = Z m_p + N m_n - m(A, Z)$

**Bem.:** evtl. vorhandene Elektronen korrigieren

- $A = Z + N$
- $m_p =$  Masse des Protons
- $m_n =$  Masse des Neutrons
- $m(A, Z)$  Masse des Kerns

Massenbestimmung:

**i** Ablenkung in homogenen Magnetfeldern

Lorenzkraft:  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ,  $\vec{F} \perp \vec{v} \rightarrow |\vec{v}| = \text{const}$  (für  $\vec{v} \cdot \vec{e}_z = 0$ )

- $\rightarrow$  Kreisbahn
- $\rightarrow qvB = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$

**ii** Massen können relativ zu bekannten Massen bestimmt werden, wenn man z.B. in einer Reaktion die beteiligten Energien kennt.

**iii** aktuell: Massenbestimmung in einer Penningfalle

- homogenes Magnetfeld
- el. Quadropfeld
- Teilchen führen oszillierende Bewegung aus  $w_c \frac{q}{m} B \rightarrow$  Massenbestimmung

Übersicht über die gemessenen Bindungsenergien

**Bem.:**

1.  $\frac{E_B}{A} \approx 8$  MeV für sehr viele Kerne
2. leichtes Maximum bei  $A \approx 60$
3.  $A \lesssim 60$  Fusion exotherm  
 $A \gtrsim 60$  Spaltung exotherm

Struktur der Kerne:  $\frac{E_B}{A}$  größer als für Nachbarn mit  $N, Z = 20, 28, 50, 82, \dots \Rightarrow$  magische Zahlen  
Tröpfchenmodell: gibt den generellen Trend wieder

Volumenenergie:  $c_v \cdot A$  mit  $c_v > 0$

- bedeutet, dass jedes Nukleon nur mit einer endlichen Zahl an Nachbarn wechselwirkt (inkompressible Flüssigkeit)

Oberflächenenergie:  $-c_s A^{\frac{2}{3}}$

- Korrektur, denn Nukleonen an der Oberfläche haben weniger Nachbarn

Volumenenergie:  $c_v \cdot A$  mit  $c_v > 0$

Coulombenergie:  $-c_c \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}}$

- Korrektur, da Protonen sich elektrostatisch abstoßen

- Paarungsenergie:  $c_p \delta \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$
- Nukleonen paaren sich gern zu Spin 0
- Asymmetrieenergie:

$$c_v = a_v \left( 1 - \kappa \left( \frac{N-Z}{A} \right)^2 \right)$$

$$c_s = a_s \left( 1 - \kappa \left( \frac{N-Z}{A} \right)^2 \right)$$

Idee: Nukleon-Nukleon-WW favorisiert Symmetrie zu  $Z$  und  $N$  ( $\hat{=}$  Isospin = 0)



**Bem.:**

- qualitative Beschreibung durch Bethe-Weizsäcker-Formel:

$$E_B = c_v A - c_s A^{\frac{2}{3}} - c_c \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{c_p \delta}{A^{\frac{1}{2}}}$$

- $c_v = a_v \left(1 - \kappa \left(\frac{N-Z}{A}\right)^2\right)$

$$a_v = 15,68 \text{ MeV}$$

- $c_s = a_s \left(1 - \kappa \left(\frac{N-Z}{A}\right)^2\right)$

$$a_s = 18,56 \text{ MeV}$$

$$\kappa = 1,79$$

$$c_c = 0,741 \text{ MeV}$$

$$c_p = 10,28 \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} -1 & (\text{u,u}) \\ 0 & \text{für (u,g) Kerne} \\ +1 & (\text{g,g}) \end{cases}$$

Gebirge (Tal) der Stabilität

$$\frac{\partial}{\partial z} E_B(A, Z) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow Z_{Geb.} \approx \frac{A}{1,98 + 0,15A^{\frac{2}{3}}}$$

**Bem.:**

- Flüchtigkeits- (Tröpfchen-) Modell darf nicht zu wörtlich genommen werden
- Kerne sind quantenmechanische Objekte
- Teilchen haben Abstand  $r_0$
- mittlere freie Weglänge  $\sim O(r_0)$
- Nukleonen haben Abstand  $\sim 2 \text{ fm} > r_0$
- mittlere freie Weglänge  $>$  Kern, da Fermionen (Pauliprinzip)

## 1.5 Quantenzahlen des Kerns

### 1.5.1 Einschub: Gekoppelte Drehimpulse

**Bem.:**

- Protonen und Neutronen tragen Spin ( $= \frac{1}{2}$ )
- Kern trägt Gesamtspin, der sich aus Einzelspins ergibt.

Wiederholung:

- Spin  $\vec{s}$  und Bahndrehimpuls  $\vec{l}$  sind Drehimpulsoperatoren

$$[s^x, s^y] = i\hbar s^z \text{ und zyklisch}$$

$$[s^k, s^l] = i\hbar \epsilon_{klm} s_m$$

$$\rightarrow [s^j, s^2] = 0$$

Für Kernkommutierende Op. ex. gemeinsame Eigenbasis  
wähle  $\vec{s}^2$  und  $s^z$

$$\vec{s}^2 |sm\rangle = \hbar s(s+1) |sm\rangle ; s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

$$\vec{s}^z |sm\rangle = \hbar m |sm\rangle , m = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

- Dimension des Hilbertraumes für einen Spin  $s$ :  $\dim \mathcal{H} = 2s + 1$
- weiter

$$- \vec{s}^+ |sm\rangle = \sqrt{(s-m)(s+m+1)} |s(m+1)\rangle = \sqrt{s(s+1) - m(m+1)} |s(m+1)\rangle$$

$$- \vec{s}^- |sm\rangle = \sqrt{(s+m)(s-m+1)} |s(m-1)\rangle = \sqrt{s(s+1) - m(m-1)} |s(m-1)\rangle$$

Behandlung mehrerer Spins:

i. 2 Spins  $s = \frac{1}{2}$ : ONB:  $\{|s_1 m_1\rangle \otimes |s_2 m_2\rangle\} = \{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$

**Def.:** Gesamtspin:  $\vec{s} = \vec{s}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{s}_2$

**Satz:** ohne Beweis:  $\vec{s}$  ist ein Drehimpulsoperator  $\Rightarrow \vec{s}^2 |SM\rangle = \hbar^2 S(S+1) |SM\rangle$   
 $\vec{s}^z |SM\rangle = \hbar M |SM\rangle$

$$|SM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |s_1 m_1; s_2 m_2\rangle \langle s_1 m_1; s_2 m_2 | SM\rangle$$

gilt  $\vec{s}^z = \vec{s}_1^z + \vec{s}_2^z$

$$\begin{aligned} \vec{s}^z |SM\rangle &= \hbar M |SM\rangle = (\vec{s}_1^z + \vec{s}_2^z) \sum_{m_1 m_2} |s_1 m_1; s_2 m_2\rangle \langle s_1 m_1; s_2 m_2 | SM\rangle \\ &= \sum_{m_1 m_2} \hbar(m_1 + m_2) |s_1 m_1; s_2 m_2\rangle \langle s_1 m_1; s_2 m_2 | SM\rangle = \text{Vorfaktor} \cdot \sum \dots, \text{ da EZ} \\ &\Rightarrow M = m_1 + m_2, \text{ bzw. } \langle s_1 m_1; s_2 m_2 | SM\rangle = 0 \text{ für } M \neq m_1 + m_2 \end{aligned}$$

Damit

$$|S M\rangle$$

$$|1 1\rangle = |++\rangle$$

$$|1 -1\rangle = |--\rangle$$

$$\begin{aligned} \vec{s}^- |1 1\rangle &\rightarrow |1 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) \\ |0 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) \perp \text{ zu allen anderen} \end{aligned}$$

ii. allgemein: kople zwei Spins  $s_1$  &  $s_2$  zu  $S$

$|s_1 - s_2| \leq S \leq s_1 + s_2$  bedeutet, dass die möglichen  $S$ -Werte  $S = |s_1 - s_2|, |s_1 - s_2| + 1, \dots, (s_1 + s_2) - 1, (s_1 + s_2)$ ; jeder  $S$ -Wert kommt nur einmal vor

**Bem.:**

1.  $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}; S = 0, 1$

2.  $s_1 = \frac{5}{2}, s_2 = 1; S = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$

**Satz**  $|SM; s_1 s_2\rangle = \sum_{m_1 m_2} |s_1 m_1; s_2 m_2\rangle \underbrace{\langle s_1 m_1; s_2 m_2 | SM; s_1 s_2\rangle}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeff}}$

**Satz**  $\langle s_1 m_1; s_2 m_2 | SM; s_1 s_2\rangle = 0$  für  $M \neq m_1 + m_2$

iii. Kopplung mehrerer Spins: sukzessiv!

**Bsp.:** 4 Spins:  $\vec{s}_1 + \vec{s}_2 \rightarrow \vec{s}_{12}, \vec{s}_{12} + \vec{s}_3 \rightarrow \vec{s}_{123}, \vec{s}_{123} + \vec{s}_4 \rightarrow \vec{S}$   
 alternativ:  $\vec{s}_1 + \vec{s}_2 \rightarrow \vec{s}_{12}, \vec{s}_3 + \vec{s}_4 \rightarrow \vec{s}_{34}, \vec{s}_{12} + \vec{s}_{34} \rightarrow \vec{S}$   
 3 Spins  $s = 1$

+1

0 → 1\*

$$1 + 1 \rightarrow 1 \rightarrow \begin{cases} 0 \\ 1^* \\ 2 \end{cases} \quad * \hat{=} \text{Multiplizität}=3$$

$$2 \rightarrow \begin{cases} 1^* \\ 2 \\ 3 \end{cases}$$

Effektive Wechselwirkung zwischen Spins

a)

$$\underline{H} = \frac{-2J}{\hbar^2} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \frac{-J}{\hbar^2} [\vec{S}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2] \quad \vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

$$E = -J[S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)]$$

**Bem.:** wenn  $J < 0$ , dann minimales  $S$  Grundst.

b)

$$\underline{H} = -\frac{2J}{\hbar^2} [\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_4 + \vec{s}_4 \cdot \vec{s}_1 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_4 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3]$$

c)

$$\underline{H} = -2 \sum_{i < j} \frac{J_{ij}}{\hbar^2} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$$

Wie lautet jetzt die Einteilchenwellenfunktion eines Nukleons?

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha, m} c_{\alpha m} |\varphi_{\alpha}\rangle \otimes |sm\rangle \quad s = \frac{1}{2}$$

$|\varphi_{\alpha}\rangle$  : ONB im HR in dem  $\vec{x}$  und  $\vec{p}$  def. und  $|sm\rangle$  : ONB im Spin-Hilbertraum  
 Proton und Neutron werden im Isospin-Formalismus beschrieben

**Def.:** Isospin Drehimpulsoperator  $\vec{\tau}$

$$\vec{\tau}^2 |\tau m_{\tau}\rangle = \hbar^2 \tau(\tau+1) |\tau m_{\tau}\rangle \quad \text{für Nukleonen } (p, n) \quad \tau = \frac{1}{2}$$

$$\vec{\tau}^z |\tau m_{\tau}\rangle = \hbar m_{\tau} |\tau m_{\tau}\rangle \quad \text{für Nukleonen } (p, n) \quad \tau = \frac{1}{2} \quad m_{\tau} = \frac{1}{2} \text{ Proton; } m_{\tau} = -\frac{1}{2} \text{ Neutron}$$

Damit

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha, m_s, m_{\tau}} c_{\alpha, m_s, m_{\tau}} |\varphi_{\alpha}\rangle \otimes |sm_s\rangle \otimes |\tau m_{\tau}\rangle$$

Im Allg. beschreiben diese Zst. Superpositionen von Protonen und Neutronen, vgl:

$$|\tau = 0, m_{\tau} = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \tau = \frac{1}{2}, m_{\tau} = \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \tau = \frac{1}{2}, m_{\tau} = -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \tau = \frac{1}{2}, m_{\tau} = -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \tau = \frac{1}{2}, m_{\tau} = \frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

**1.** Drehimpuls des Kerns

Wiederholung: gute Quantenzahl: zugehöriger Operator vertauscht mit  $\underline{H}$

### Bsp.:

- Wasserstoff:
  - $[L^j, H] = 0 \rightarrow l$  und  $m_l$  gute QZ
  - $[S^j, H] = 0 \rightarrow s$  und  $m_s$  gute QZ
- wenn  $H$  Spin-Bahn-Kopplung enthält:  $\vec{l} \cdot \vec{s}$ , dann sind  $m_l$  &  $m_s$  keine Guten QZ  
Möglichkeit:  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \rightarrow j, m_j, l, s$  gute QZ

im Kern analog: Bahndrehimpuls und Spin ergeben Gesamtdrehimpuls; dieser ist gute QZ

Mit Gesamtdrehimpuls ist magnetisches Moment verbunden:  $\underline{H} = -\underline{\mu} \cdot \underline{B}$ ;  $\underline{\mu}_L = g_L \mu_N \frac{\underline{L}}{\hbar}$ ;  $\underline{\mu}_S = g_S \mu_N \frac{\underline{S}}{\hbar}$   
 $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3,15 \cdot 10^{-14} \frac{\text{MeV}}{\text{T}}$  Kernmagneton

**Bem.:** Bsp: Zweiniveausystem mit  $m_j = \pm \frac{1}{2} \Delta E \propto B \rightarrow$  resonante Übergänge bei  $\omega = \omega_r$   
Resonanzexp.: NMR (nuclear magnetic resonance)

$\rightarrow$  Bestimmung von Kerneigenschaften (Spektrum, Dipolmoment, ...)

$\rightarrow$  Bestimmung lokaler Magnetfelder, d.h. z.B. der chem. Zusammensetzung; Kernspinresonanztomographie

aber: WW favorisiert  $S = 0$  bzw.  $J = 0$ ; muss NMR-aktive Kerne finden

**2. Parität:**  $\underline{P}: \vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ ;  $\underline{P}^2 = 1$ , Eigenwerte  $\pm 1$

+1  $\hat{=}$  gerade Fkt.:  $f(-\vec{x}) = f(\vec{x})$

-1  $\hat{=}$  ungerade Fkt.:  $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$

Parität ist gute QZ für Kerne (wenn man von schwacher WW absieht)

**Bsp.:**  $^{11}\text{B}: J_\pi = \frac{3}{2}^-, T = \frac{3}{2}$

**3. Elektrische und magnetische Momente**

Idee: Kerne enthalten Ladungsverteilung und Verteilung magn. Momente

resultierende el.stat + mag. Felder lassen sich nach Multipolen charakterisieren (s. Theorie I)

**Satz:** Kugelsym. Kerne haben keine höheren elektr. Multipole

Bei deformierten Kerne gibt es höhere Momente (insbesondere Quadrupol)

$\rightarrow$  daraus kann man auf Kerndeformation und Kernmodelle schließen

$\rightarrow$  „Diskus“ = oblate; „Zigarre“ = prolat

## 2 Radioaktivität

**Def.:** Radioaktivität: lat., Strahlungsaktivität. Eigenschaft instabiler Atomkerne, sich spontan, d.h. exotherm, umzuwandeln. Energie wird in Form von Teilchen oder el.-mag. Strahlung ( $\gamma$ ) abgegeben. Da E hoch  $\rightarrow$  ionisierende Strahlung.

Begriffe:

- radioaktive Substanz: Stoff, der die instabilen Atomkerne enthält
- radioaktive Strahlung: populär, aber falsch, da Strahlung nicht radioaktiv, sondern ionisierend
- radioaktiver Zerfall: bezieht sich auf Ausgangsstoff, der abnimmt

Zerfallsgesetz:  $\frac{d}{dt}N = -\lambda N$ ,  $N(t) \hat{=}$  Zahl der vorliegenden, d.h. noch nicht zerfallenen Kerne  $\lambda \hat{=}$  Zerfallskonstante, bzw. -rate

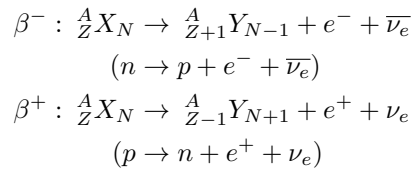
$$\Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, N_0 = N(t=0)$$

**Bem.:**

- stochastischer Prozess
- im wesentlichen von äußeren Einflüssen unbeeinflusst ( $T, B, P, \dots$ )  $\rightarrow$  Energieskalen

## 2.1 Zerfallsarten

### a) $\beta$ -Zerfall

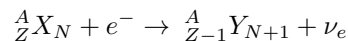


→  $\beta$ -Zerfälle erfolgen entlang von Isobaren.  
wegen Paarungsenergie gibt es 2 Fälle

- A ungerade ( $\delta = 0$ )  
→ nur 1 stabiles Isobar
- A gerade  
→  $(n, n)$  instabil, 4 Ausnahmen  
→ mehrere stabile  $(g, g)$ -Isobare

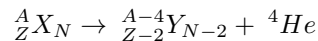
### b) Elektroneneinfang

**Bem.:** im Konkurrenz zu  $\beta^+$ ; auch mgl. für  $0 \leq \Delta E \leq 2m_e c^2$ , da Einfang eines schon vorhandenen  $e^-$  aus Hülle



→ tritt häufiger bei schweren Kernen auf.

### c) $\alpha$ -Zerfall



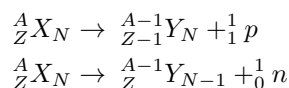
Frage: Warum passiert das überhaupt? Warum kommen die Nukleonen nicht einzeln?

Antwort: BILD Potentialtopf

1.  $v \hat{=}$  eff. Einnukleonenpotential  
-Nukleonen haben nicht genügend Energie, um den Kern zu verlassen
2. Wenn  $\frac{E_B}{A} < \frac{E_B^{He}}{A}$ , dann lohnt Bildung eines  ${}^4_2 He \hat{=}$   $\alpha$  im Kern
3. - V eff. Potential für  $1\alpha$   
-  $\alpha$  kann durch den Coulomb-Wall tunneln

### d) weitere (nicht so häufige Zerfälle)

- doppelter Betazerfall:  ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+2} Y_{N-2} + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$   
– tritt manchmal auf, wenn einfacher  $\beta$ -Zerfall energetisch nicht möglich  
– interessant: Vermutung, dass es neutrinolose doppelte  $\beta$ -Zerfälle geben könnte. Möglich, wenn Neutrino sein eigenes Antiteilchen wäre. Solche Teilchen heißen Majorana-Teilchen. Noch nicht gefunden!
- doppelter Elektroneneinfang
- $\gamma$ -Zerfall:  $\underbrace{{}^A_Z X_N^*}_{\text{angeregter Kern}} \rightarrow {}^A_Z X_N + \gamma$   
angeregter Kern ist oft selbst Produkt eines Zerfalls
- innere Konversion:  ${}^A_Z X_N^* \rightarrow {}^A_Z X_N^+ + e^-$  durch Anregungsenergie  $e^-$  aus Hülle
- spontane Nukleonenemission



- spontane Spaltung:  
 ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^{A_1}_{Z_1} Y_{N_1} + {}^{A_2}_{Z_2} Y'_{N_2} + x \cdot \frac{1}{0} n$   
Man unterscheidet qualitativ symmetrische und asymmetrische Spaltung. Sym  $\Rightarrow$  etwa gleich groß

## 2.2 Messgrößen

### 1. Aktivität

**Def.:**  $A$ : Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit

Einheit:  $Bq = \text{Bacquerel} = s^{-1}$

$$A = \frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}$$

extensiv, d.h. proportional zur Menge

### 2. Energiedosis

**Def.:**  $D = \frac{dE}{dm} = \frac{1}{\delta} \frac{dE}{dV}$

- am Masse des Absorbers abgegebene Energie

- abhängig vom Absorbermaterial, d.h. Angabe von  $D$  ohne Angabe des Materials sinnlos

Einheit =  $Gy = \text{Gray} = \frac{J}{kg}$

**Bsp.:** Luft  $D \propto 35 \frac{J}{kg}$ ; diese Energie wird absorbiert, in dem Luftmoleküle ionisiert werden; sie ist deshalb proportional zur Ionendosis

### 3. Ionendosis

**Def.:**  $J = \frac{dQ}{dm} = \frac{1}{\delta} \frac{dQ}{dV}$ , durch Ionisation erzeugte Ladungen eines Vorzeichens pro Masse

**Bem.:** Meßgeräte Ionisationskammer, Zählrohr, Stabdosimeter

Einheit:  $\frac{As}{Bq}$

$$D = f \cdot J$$

**Bsp.:** Luft:  $f = 35 \frac{Gy}{\frac{C}{kg}}$

durchschnittliche Energie für Bildung eines Ionenpaares  $\epsilon = 35eV \rightarrow$  Energie für  $1C \rightarrow 35J$

$$J = 1 \frac{C}{kg} \hat{=} D = f \cdot J = 35Gy$$

biologisches Weichgewebe bzw. wässrige Lösung  $f = 37 \frac{Gy}{\frac{C}{kg}}$

### 4. Äquivalentdosis

**Def.:**  $H = Q \cdot D$ ; durch ionisierende Strahlung aufgenommene Energie pro Masse.

$Q \hat{=}$  Qualitätsfaktor; modelliert die relative biologische Wirksamkeit

Einheit:  $Sv = \text{Sievert} = \frac{J}{kg}$

**Bem.:**

- von  $D$ ,  $J$  und  $H$  gibt es auch die Zeitableitungen: Dosisleistung

Strahlenbelastung  $\hat{=}$  natürliche Strahlenbelastung

- $^{222}Rn$ :  $1,1 \frac{mSv}{a}$
- terrestrische Str.:  $0,4 \frac{mSv}{a}$  ( $\gamma$ :  $Th$ ,  $U$ ,  $^{40}K$ )
- kosmische Str.:  $0,3 \frac{mSv}{a}$  (Sonnenwind:  $p$  &  $\alpha$ , galaktische: Ionen, extragal.  $p$ ,  $\alpha$ )
- rad. Stoffe in der Nahrung  $0,3 \frac{mSv}{a}$

## 2.3 Zerfallsgesetz, Zerfallsreihen

- Zerfallsgesetz:  $\dot{N} = -\lambda N \rightarrow N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$  (wird nicht gemessen)

- gemessen:  $A = -\dot{N} = \lambda N \rightarrow A(t) = A(0)e^{-\lambda t}$

**Bem.:**

-  $A = -\dot{N}$  stimmt nur bei einem Zerfall

- bei Zerfallskette:  $A \rightarrow B \rightarrow C$ :  $\dot{N}_B = \underbrace{-\lambda_B N_B}_{\text{nur das ist Aktivität}} + \lambda_A N_A$

**Def.:** Halbwertszeit:  $T_{\frac{1}{2}} = t$  für  $\frac{N(0)}{2} = N(0)e^{-\lambda t}$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

**Def.:** mittlere Lebensdauer: Zeit, die die Kerne im Mittel „leben“  $\tau = \frac{1}{\lambda}$

Herleitung: Zur Zeit  $t$  zerfallen  $dN = \lambda N dt$  Kerne, die haben bis  $t$  überlebt. Gewichte Lebensdauer mit Zahl der Kerne, die bis dahin überlebt haben.

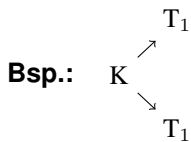
$$t(0) = 0, t(N_0) = \infty$$

$$\tau = \frac{\int_0^{N_0} t dN}{\int_0^{N_0} dN} = \frac{1}{N_0} \int_{t(0)}^{t(N_0)} t \cdot \lambda N dt = \frac{1}{N_0} N_0 \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

**Bem.:**

- Zerfallsgesetz ist exp. Befund
  - auf Seiten der Theorie müssen folgende Annahmen gemacht werden:
    - a) Wahrscheinlichkeit, dass Kern in einem Zeitintervall zerfällt ist unabhängig davon, wie lange er vorher schon nicht zerfalls ist. „Er ist stets, wie neu“, vgl. Lotto, Würfeln
    - b) Zerfälle mehrerer Kerne statistisch unabhängig
- $\Rightarrow N(t)$  ist mittlere Zahl an Kernen zur Zeit  $t$

Zerfallskanäle: Kern zerfällt alternativ in Töchter  $T_1, T_2, \dots \rightarrow dN = \sum_i \lambda_i N dt$



**Bem.:** Beobachtet man zur einem Kanal, so bestimmt man trotzdem  $\lambda = \sum_i \lambda_i$ , da Aktivität proportional zu  $N$  und  $N$  über alle Kanäle zerfällt

$$\frac{A_i(t_1)}{A_i(t_2)} = \frac{\lambda_i N(t_1)}{\lambda_i N(t_2)} = e^{-\lambda(t_1-t_2)}$$

**Zerfallsreihen** Sei:  $N_1 \xrightarrow{\lambda_1} N_2 \xrightarrow{\lambda_2} N_3 \rightarrow \dots N_k$

Ratengleichung:  $\dot{N}_i = \lambda_{i-1} N_{i-1} + \lambda_i N_i, \lambda_0 = c$

**Lsg.:**

$$\begin{aligned}
 N_1 &= c_{11} e^{-\lambda_1 t} \\
 N_2 &= c_{21} e^{-\lambda_1 t} + c_{22} e^{-\lambda_2 t} \\
 &\vdots \\
 N_k &= c_{k1} e^{-\lambda_1 t} + c_{k2} e^{-\lambda_2 t} + \dots + c_{kk} e^{-\lambda_k t}, \lambda_k = 0
 \end{aligned}$$

**Bsp.:**  $\dot{N}_2 = -c_{21} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - c_{22} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 = \lambda_1 c_{11} e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 c_{21} e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 c_{22} e^{-\lambda_2 t}$

$$\rightarrow -c_{21} \lambda_1 = c_{11} \lambda_1 - c_{22} \lambda_2 \rightarrow c_{21} = c_{11} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$c_{11}$  &  $c_{22}$  durch Anfangsbed. bei  $t = 0$

**allg. Rekursionsformel:**

$$c_{ij} = c_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_j} \text{ für } i > j$$

$c_{ii}$  aus Anfangsbed. bei  $t = 0$

Produktion künstlicher radioaktiver Substanzen sei  $\dot{N} = -\lambda N + \underbrace{P}_{\text{Produktionsrate}}$

Bsp.:  $Mo$  aus  $U$  für  $Tc$ -Milken

$$t = 0: N(0) = 0, p = const \Rightarrow N(t) = \frac{P}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

Bei der Prokuktion lohnt es nicht, mehr als ein paar  $\frac{1}{\lambda}$  zu warten, da nur noch kleiner Zuwachs

**Natürliche Zerfallsreihen**

**Bem.:**

- schwere Elemente (jenseits des  $Fe$ ) sind in Supernovaexplosionen entstanden
- nur wenige radioaktive Isotope haben ausreichend lange Halbwertszeiten, um heute noch vorzuliegen
- schwere Kerne:  $\alpha$ -Zerfall:  $A \rightarrow A - 4$ ,  $\beta$ -Zerfall:  $A \rightarrow A$

$\Rightarrow$  Zerfallsreihen:  $A = 4n + s$ ,  $s = 0, 1, 2, 3$

A	Reihe	Mutterkern	$T_{\frac{1}{2}}$
$4n$	Thorium	$^{232}Th$	$1,4 \cdot 10^{10}a$
$4n + 1$	Neptunium	$^{237}Np$	$2,14 \cdot 10^6a$ ← „ausgestorben“
$4n + 2$	Uranium	$^{238}U$	$4,47 \cdot 10^9a$
$4n + 3$	Aktinium	$^{235}U$	$7,04 \cdot 10^8a$

**Altersbestimmung mit radioaktiven Isotopen**

**Idee:** Zusammensetzung aus Mutter- und Tochteranteilen zum Entstehungszeitpunkt wird als bekannt vorausgesetzt. Minerale:

- bei Entstehung chemische Trennung von Mutter- und Tochterkernen
- Entstehung der Mineralien schnell im Vergleich zur Bildung der Tochterkerne

$$N_2(t) = N_1(0) - N_1(0)e^{-\lambda t} = N_1(0)(1 - e^{-\lambda t}) = N_1(t)(e^{\lambda t} - 1)$$

$$\frac{N_2(t)}{N_1(t)} = e^{\lambda t} - 1 \rightarrow t$$

**Bem.:**

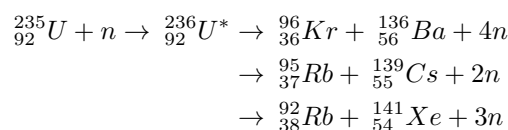
- Genauigkeit am höchsten für  $\lambda t \sim 1$
- wähle günstiges Isotop

**Radiocarbonmethode**

1. In der Atomsphäre wird durch kosmische Strahlung ständig  $^{14}C$  gebildet:  
 $^{14}N(n,p)^{14}C \cong ^{14}N + n \rightarrow ^{14}C + p$
2.  $^{14}C$  zerfällt mit  $T_{\frac{1}{2}} = 5730a$ :  $^{14}C \rightarrow ^{14}N + \beta^- + \bar{\mu}_e$
3. Es stellt sich Gleichgewicht ein:
  - bis 1950:  $\frac{N(^{14}C)}{N(^{12}C)} \approx 1,5 \cdot 10^{-12}$
  - danach:  $\sim 3 \cdot 10^{-12}$  durch Kernwaffenexplosionen
  - inzwischen fast auf normal abgeklungen (durch industriellen  $CO_2$ -Ausstoß?)
4. Der lebende Organismus nimmt  $C$  im Gleichgewichtskonzentration auf. Nach Absterben wird kein  $C$  mehr zugeführt, und  $^{14}C$  zerfällt nur noch. Aus dem aktuellen Verhältnis kann auf das Alter geschlossen werden.
5. Funktioniert bis etwa 30000a.

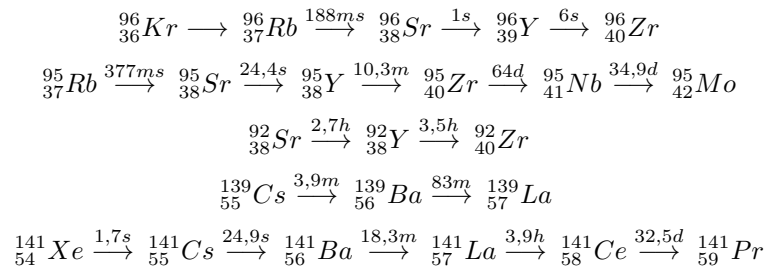
**3 Kernspaltung und Kernfusion****3.1 Kernspaltung**

**Satz:** Bei der Kernspaltung wird die neutroninduzierte Spaltung genutzt.





a



Bem.:

- nutzbare Energie  $\hat{=}$  kinetische Energie der Spaltprodukte &  $\gamma$ -Quanten, die in Wärme umgewandelt werden
- nicht nutzbare Energie: Neutrinos, da sie praktisch nicht wechselwirken und den Reaktor einfach verlassen

b Energiebilanz der Spaltung von  ${}_{92}^{235}\text{U}$ :  ${}_{92}^{235}\text{U} + n \rightarrow f_1^* + f_2^* + \nu \cdot n + x \cdot \bar{\nu} + Q$

1. kin. Energie der Spaltfragmente  $167 \pm 5 \text{ MeV}$
2. kin. Energie der Spaltungsneutronen  $5 \pm 0,2 \text{ MeV}$
3. Prompte  $\gamma$ -Strahlung  $8 \pm 1,5 \text{ MeV}$
4. Verzögerte  $\gamma$ -Strahlung aus Spaltfragmenten  $6 \pm 1 \text{ MeV}$
5.  $\beta$ -Strahlung der Spaltfragmente  $6 \pm 1 \text{ MeV}$
6. kin. Energie der  $\bar{\nu}_e$   $12 \pm 2,5 \text{ MeV}$

$$\sum : Q = 204 \pm 6 \text{ MeV}$$

$\Rightarrow$  nutzbar:  $Q_n = Q - Q_{\bar{\nu}_e} \approx 192 \text{ MeV} = 3,08 \cdot 10^{-11} \text{Ws}$

$\Rightarrow 1 \text{ Watt} \hat{=} 3,25 \cdot 10^{10} \text{ Spaltungen/s}$

$\Rightarrow 1 \text{g Uran} \hat{=} 2,55 \cdot 10^{21} \text{ Atomkerne} \hat{=} 22 \text{ MWh}$

Zum Vergleich: 22MWh bei Verbrennung von 2851kg Steinkohle oder 79198kg Braunkohle

Bem.:

- logisch, da Energieskala der Atomhülle  $\sim \text{eV}$ ; Energieskala der Kerne  $\sim \text{MeV} \rightarrow$  Faktor 1 Mio.

c Kettenreaktion:  ${}_{92}^{235}\text{U} + n \rightarrow f_1^* + f_2^* + \nu n$

Bem.:

- für Kettenreaktion muss  $\nu > 1$  (notwendig)
- aber:  $n$  gehen in anderen Reaktionen verloren;  $n$  treten aus dem Material aus
- Wirkungsquerschnitt für Spaltung, ist abhängig von Energie der  $n$ ; für  ${}_{92}^{235}\text{U}$  thermische Neutronen günstig

Def.: thermische Neutronen:  $E_{\text{kin}} \sim \frac{3}{2} k_B T_{\text{Raum}} \sim 0,04 \text{ eV}$  (Raumtemp.)

$E(\text{kalte } n) < E(\text{thermische } n) < E(\text{schnelle } n)$

- Energieverteilung der Spaltneutronen

$$\frac{dN}{dE} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}, \quad kT \approx 1,29 \text{ MeV bei Spaltung}$$

$\rightarrow$  Neutronen aus Spaltung sind schnell!

$\rightarrow$  Neutronen müssen im Reaktor abgebremst (moderiert) werden

Moderator soll möglichst wenig Neutronen absorbieren, aber gut abbremsen.

Moderator	$\sigma_{\text{abs}}(b)$	Bremslänge (schnell $\rightarrow$ thermisch)
$\text{H}_2\text{O}$	0,664	5,3cm
$\text{D}_2\text{O}$	0,001	11,2cm
Graphit	0,0045	19,1cm

- Spaltungsdynamik

1. Durch Neutronenaufnahme gewinnt Kern Anregungsenergie (bezogen auf den neuen Grundzustand) → Anregung von Schwingungen
2.  $A = Z + N$ ; wenn  $N$  ungerade, dann kann der Kern besonders gut thermische  $n$  aufnehmen und gewinnt durch Paarungsenergie viel Anregungsenergie
3. für gerade  $N$ , z.B. in  $^{238}\text{U}$ , bringen thermische  $n$  keinen Vorteil; hier könnten auch schnelle  $n$  genutzt werden

**Def.:** „gut spaltbar“  $\hat{=}$  Wirkungsquerschnitt  $\geq 100b$

**Bsp.:** Spaltung durch th.  $n$ :  $\sigma(^{241}\text{Am}) \sim 3,16b$ ;  $\sigma(^{241}\text{Pu}) \sim 1010b$   
 Abschätzung für Anzahl der Spaltneutronen

$$\nu(E) = \nu_0 + aE, E \hat{=} \text{Energie des einlaufenden } n$$

	$^{233}\text{U}_{92}$	$^{235}\text{U}_{92}$	$^{239}\text{Pu}_{94}$	$^{241}\text{Pu}_{94}$
$\nu_0$	2,49	2,41	2,9	2,94
$a(\text{MeV}^{-1})$	0,131	0,136	0,127	?
$\alpha = \frac{\sigma_\gamma}{\sigma_f}$	0,093	0,17	0,37	0,4

Neutronenvermehrung  $\mu = \frac{\# \text{ Spaltneutronen}}{\# \text{ absorbierte } n} = \nu \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_\gamma} = \nu \cdot \frac{1}{1 + \alpha}$

$\sigma_f \hat{=} \text{Wirkungsquer. für Spaltung}$

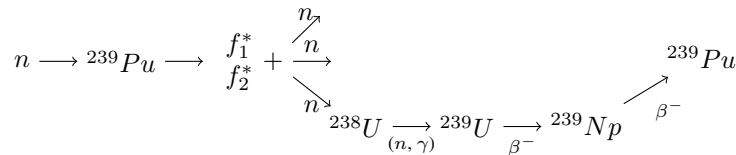
$\sigma_\gamma \hat{=} \text{Wirkungsquer. für andere Reakt., haupts. Anregung mit } \gamma\text{-Emission}$

**Bem.:**

- bei Reaktorkonstruktion spielt das Verhalten der Neutronen eine große Rolle → Vier-Faktor-Formel

Brutreaktoren

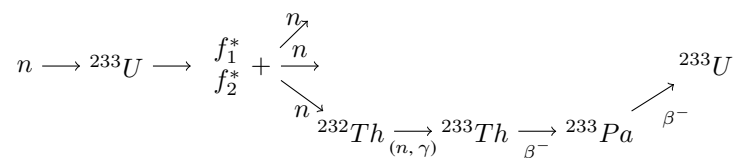
**a** schneller Brüter; Idee:  $^{235}\text{U}$  selten; wollen  $^{238}\text{U}$  nutzen



**Bem.:**

- ohne Moderator, Kühlung mit flüssigem Natrium
- erzeugen Überschuss an Spalmaterial
- technisch sehr komplex

**b** Thorium-Brüter



- Graphitmoderator
- Hochtemperaturreaktor (Heliumkühlung)
- geringe Brutraten

**Bem.:** Wirkungsgrad der Brutraten gut, da hohe Temp.

### 3.2 Transmutation

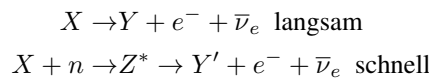
**Problem:**

- radioaktiver Abfall aus Kernkraftwerken + Waffenkernbrennstoff langlebig
- Entsorgung/ Sicherheit problematisch

**Idee:**

- Reaktionen können beschleunigt werden durch Umwandlung in andere Isotope
- exotherm
- Carlo Rubbia, 1995

**Bsp.:**



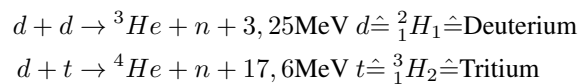
**Bem.:** Brüten ist eine Art von Transmutation, z.B.  $^{232}\text{Th} + n \rightarrow ^{233}\text{K}$  Konzept:

- exotherm
- $\sim 15\%$  der Energie für Betrieb
- Testanlage, 2023, Mol, Belgien + Projekt in USA

→ realist. Ziel pro Anlage: „Vernichtung“ von etwa 250kg Ne, Ac, Pu, ... pro Jahr

### 3.3 Kernfusion

Technisch Verwendbare Reaktionen:



**Bem.:**

- zur Zündung müssen die Gase eine hohe Temp. erreichen,  $T \sim (100 \dots 1000) \cdot 10^6 K$ , da  $10^9 K \sim 100\text{keV}$ ; eine ausreichend hohe Dichte aufweisen, und diesen Zustand über eine ausreichend lange Zeit aufrecht erhalten

→ Lawson-Kriterium

i. Fusionsratendichte

$$N_{dt} = \rho_t \cdot \rho_d \cdot v \cdot \sigma_{dt} \quad \text{mit } \rho_t \text{ Dichte von } t, \rho_d \text{ Dichte von } d, v \text{ Relativgeschw., } \sigma_{dt} \text{ Wirkungsquerschnitt}$$

ii. da  $v$  &  $\sigma_{dt}$  von  $T$  abhängig → benutze thermisches Mittel  $\langle v\sigma_{dt} \rangle$  sei  $\rho_d = \rho_t = \frac{\rho}{2} \Rightarrow$  Leistungsdichte  $P_{dt} = \frac{1}{4}\rho^2 \langle v\sigma_{dt} \rangle \cdot Q_{dt}$   $Q_{dt} \sim 14\text{MeV}$  ( $E$  des Neutrons)

iii. Verluste hauptsächlich über Röntgen- und Bremsstrahlung; hauptsächlich durch die  $e^-$  im Plasma:

$$P_v = \underbrace{g_k}_{\text{Konst. Dichte}} \underbrace{N_e^2}_{\text{Dichte}} \underbrace{T_e^{\frac{1}{2}}}_{\text{Temp. der } e^-}$$

iv. „Verwurstung“ der Bilanzen ergibt

**Satz:** Lawson-Kriterium:

$$\underbrace{N}_{\text{Dichte}} \cdot \underbrace{\tau_b}_{\text{Einschlusszeit}} \geq \frac{3k_B T}{\frac{1}{4} \langle v\sigma_{dt} \rangle Q_{dt} \frac{\eta}{1-\eta} - g_b T^{\frac{1}{2}}} \quad \eta \hat{=} \text{Wirkungsgrad}$$

oft vereinfacht:

$$N \cdot \tau_b \geq \frac{12k_B T}{\langle v\sigma_{dt} \rangle Q_{dt}}$$

**Bsp.:**  $T = 10\text{keV} \sim 10^8\text{K}, \eta = \frac{1}{3} \rightarrow N\tau_b \geq 10^{20} \frac{\text{s}}{\text{m}^3}$

**Bem.:**

- realistische Berücksichtigung erweiterer Verluste steigert  $N\tau_b$  um mehrere Größenordnungen

Energiebilanz 1g d-t-Gemisch liefert  $\sim 100\text{MWh} \hat{=} 12,3\text{t SKE}$  (1SKE  $\hat{=} 29,3\text{MJ}$ )  
Technische Umsetzung

1. Tokamak (rus. Toroidale Kammer mit magn. Spulen)

**Bem.:**

- Plasma sehr heiß, darf nicht mit Wand in Kontakt kommen  $\rightarrow$  magnetischer Einschluss
- Magnetfelddesign wichtig, sonst instabil (Teilchen fliegen in den Wänden)
- Zufuhr von D & T als neutrale Atome, Ionisation im Plasma
- Aufheizen durch Hochfrequenz bzw. Kompression (innere Reibung des Plasmas wichtig!)
- Energieentnahme (Wärme) durch die Wand

**Probleme:**

- hohe Temperaturunterschiede:  $T_{\text{Plasma}} \sim 10^9\text{K}, T_{\text{supral. Spule}} \sim 4 - 100\text{K}$
- Neutronenkorrosion der Reaktorwände

2. Stellarator

**Bem.:**

- ähnlich Tokamak; kommt ohne Strom im Plasma aus  $\rightarrow$  damit verbundene Instabilität treten nicht auf
  - sehr kompliziertes Magnetfelddesign
- $\rightarrow$  WENDELSTEIN

3. Trägheitsfusion

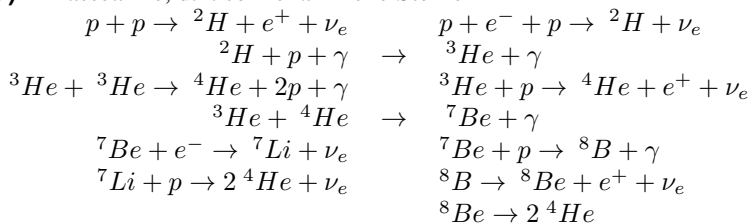
**Bem.:**

- Oberfläche des Pellets verdampft explosionsartig
  - kompression des  $d + t$ -Kerns
  - $T > 10^8\text{K}$  wird erreicht
  - $t < 1\text{ns}$ , aber Dichte ausreichend hoch  $\rightarrow$  Lawson-Kriterium erfüllt
  - Pulsenergie:  $5 \cdot \dots \cdot 10\text{MJ}$ , Aufheizzeit  $\sim 20\text{ns} \rightarrow P_{\text{puls}} \sim 500\text{TW} = 5 \cdot 10^{14}\text{W}$
- $\rightarrow$  Höchstleistungslaser wie für SDI (Strategic Defense Initiative): LLNL

**Vorteil:** Prozess stoppt sofort ohne Laser oder Pelletzufuhr  
**techn. Problem:** Pellet muss gleichmäßig getroffen werden

### 3.4 Nukleare Astrophysik

a) Massearme, d.h. sonnenähnliche Sterne



pp-Reaktionskette

netto:  $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + \gamma$

**Bem.:**

$$\begin{array}{l}
 T \leq 2 \cdot 10^7\text{K} \\
 Q = 26,4\text{MeV pro } {}^4\text{He}
 \end{array}$$



# 4 Symmetrien und Erhaltungssätze

## 4.1 Symmetrien in der klassischen Mechanik

### Satz: Erhaltungssätze

1. Homogenität der Zeit: Lagrangefkt. hängt nicht explizit von der Zeit ab → Gesamtenergie konstant

#### Bsp.:

- a) alle fundamentalen WW auf menschlichen Zeitskalen
- b)  $\underline{H} = g\mu_B \underline{g}B(t)$ ; d.h. zeitabh. Feld → keine Energieerhaltung des Systems, an das das Feld angreift

2. Homogenität des Raumes: Lagrangefkt. invariant unter Parallelverschiebung im Raum → Gesamtimpuls  $\hat{=}$  Schwerpunktsimpuls erhalten

#### Bsp.:

- a) fundamentale WW (i.d.R.) Zweiteilchenwechselwirkung, die vom Relativabstand abhängen → invariant unter Parallelverschiebung  $V \sim \sum_{k<l} f(\vec{r}_k - \vec{r}_l)$
- b) äußere Einteilchenpotentiale  $V(r)$  brechen die Translationsinvarianz, z.B.  $V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$

3. Isotropie des Raumes: Lagrangefkt. invariant unter globalen Drehungen (alle zusammen) → Gesamtdrehimpuls konstant

#### Bsp.:

- a) wenn Zweiteilchen-WW nur vom Betrag des Relativabstandes abhängt →  $\vec{L}$  erhalten;  
 $V \sim \sum_{k<l} g(|\vec{r}_k - \vec{r}_l|)$
- b) äußere nicht isotrope Potentiale

Streuprozesse:  $A+B \rightarrow B+D$ ; typische Annahme, dass WW kurzreichweitig (vorsicht bei Coulomb) → Energie besteht nur aus kinetischer und Ruheenergie

Relativistisch:  $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ , mit  $p = |\vec{p}|$  Impuls und  $m$  Ruhemasse

Nichtrelativistisch:  $E = mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m}$  → in Kernphysik oft ausreichend

→  $m_A c^2 + T_A + m_B c^2 + T_B = m_C c^2 + T_C + m_D c^2 + T_D$ ;  $T = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

**Def: Q-Wert**  $Q = (m_A + m_B - m_C - m_D)c^2 = T_C + T_D - T_A - T_B$

$Q > 0$  exotherm

$Q < 0$  endotherm

$Q = 0$  elastische Streuung

**Satz:** Energie und Impulserhaltung gelten in jedem Inertialsystem

1. Laborsystem

- im Laborsystem ruht das Target
- **Bsp.:** Linearbeschleuniger schießt auf Folie

2. Schwerpunktssystem

Schwerpunkt ruht im Ursprung

#### Bsp.:

1.  $e^+e^-$ -Collider

- bei gleichen Geschwindigkeiten erfolgt Zusammenstoß im ruhenden Schwerpunkt

2. Zerfall  $A \rightarrow C + D$  mit A ruhend, dann ruht Schwerpunkt auch

Transformation:  $(\vec{r}_A, m_A), (\vec{r}_B, m_B) \rightarrow (\vec{R}, M), (\vec{r}, \mu)$

$$\vec{R} = \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B}{m_A + m_B}, \quad M = m_A + m_B$$

$$\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B, \quad \mu = \frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B}$$

Schwerpunktsimpuls

$$\vec{P} = M \cdot \dot{\vec{R}} = m_A \dot{\vec{r}}_A + m_B \dot{\vec{r}}_B$$

Relationsimpuls

$$\begin{aligned} \mu \dot{\vec{r}} &= \mu (\dot{\vec{r}}_A - \dot{\vec{r}}_B) = \mu \left( \frac{\vec{p}_A}{m_A} - \frac{\vec{p}_B}{m_B} \right) = \frac{m_B \vec{p}_A - m_A \vec{p}_B}{m_A + m_B} \\ \rightarrow T &= \frac{1}{2} m_A \dot{\vec{r}}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{\vec{r}}_B^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \end{aligned}$$

**Bem.:**

- kin. E. des Schwerpunktes für Reaktion nicht nutzbar
- Linearbeschleuniger „verschwendet“ Schwerpunktsenergie
- Collider!

Hamilton-Formalismus  $q_\nu(t), p_\nu(t)$

sei  $B = B(q, p)$

$$\dot{B} = \sum_j \left( \frac{\partial B}{\partial q_\nu} \dot{q}_\nu + \frac{\partial B}{\partial p_\nu} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \right) = \sum_j \left( \frac{\partial B}{\partial q_\nu} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} - \frac{\partial B}{\partial p_\nu} \frac{\partial H}{\partial q_\nu} \right) = \{H, B\}$$

## 4.2 Symmetrien in der Quantenmechanik

$|\psi(t)\rangle$  sei  $\underline{B}$  Operator, nicht explizit zeitabhängig:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \underline{B} | \psi(t) \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \left\{ -\langle \psi | \underline{HB} | \psi \rangle + \langle \psi | \underline{BH} | \psi \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | \underline{BH} - \underline{HB} | \psi \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [\underline{B}, \underline{H}] | \psi \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi | [\underline{H}, \underline{B}] | \psi \rangle \end{aligned}$$

**Satz:** für nicht explizit zeitabhängiges  $\underline{B}$   $[\underline{H}, \underline{B}] = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \underline{B} | \psi(t) \rangle = 0 \forall |\psi\rangle$

**Bsp.:**

1.  $\underline{H} = \sum_{j=1}^N \frac{\vec{p}_j^2}{2m}$  alle  $3N$  Impulskomponenten sind Erhaltungsgrößen → freie Bewegung

$$\begin{aligned} \left[ \underline{p}_j^x, \underline{p}_j^x \right] &= 0, \quad \left[ \underline{p}_j^x, \underline{p}_j^y \right] = 0 \\ \left[ \underline{p}_j^x, \underline{p}_k^x \right] &= 0, \quad \left[ \underline{p}_j^x, \underline{p}_k^y \right] = 0 \end{aligned}$$

2.  $\underline{H} = \sum_{j=1}^N \frac{\vec{p}_j^2}{2m} + \sum_{k<l} \frac{1}{2} m \omega^2 (\vec{x}_k - \vec{x}_l)^2$

$$\rightarrow \underbrace{\vec{P}_{SP}}_{\text{Gesamtimpuls Schwerpunkt}}, \quad \vec{L}$$

3.  $\underline{H} = -2 \sum_{k<l} J_{kl} \vec{s}_k \cdot \vec{s}_l \Rightarrow \vec{S} = \sum_k \vec{s}_k$  erhalten (alle drei Komponenten)

4.  $\underline{H} = -2 \sum_{k<l} J_{kl} \vec{s}_k \cdot \vec{s}_l + g \mu_B \underbrace{\vec{B} \cdot \sum_k \vec{s}_k}_{B \vec{s}^z}$  o.B.d.A.  $\vec{B} = B \vec{e}_z \rightarrow \vec{S}^2$  &  $\vec{S}^z$

## 4.2.1 Einschub: Symmetrien und Gruppen

**Bem.:**

- Gruppentheorie-mathematischer Apparat zur Betrachtung von Symmetrien
- Gruppen haben Elemente und eine Verknüpfung dazwischen, z.B. Drehungen und Hintereinanderausführung (Multiplikation)
- kontinuierliche Gruppen werden durch kontinuierlichen ( $\in \mathbb{R}$ ) Parameter parametrisiert

**Bsp.:**

$$G_T = \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{p}} \right\}$$

- Gruppe der Translationen im 3-dim. Raum (Verschiebung um  $\vec{a}$  im Ort), abelsch, d.h.  $g_1 g_2 = g_2 g_1$

$$G_L = \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\varphi} \cdot \vec{L}} \right\}$$

- Gruppe der Drehungen im 3-dim Raum (um  $\vec{\varphi}$ ) nicht abelsch
- Lie-Gruppen kontinuierlich und diffbar nach Parameter
- Casimir-Operator: invariant unter Anwendung der Gruppenelemente  
z.B.  $\vec{L}^2$  für Drehgruppe
- Multiplett: Eigenraum eines Casimir-Operators zu einem Eigenwert,  
z.B. a)  $\{|l = a, m = 0\rangle\}$ , b)  $\{|l = 1, m = 1\rangle, |l = 1, m = 0\rangle, |l = 1, m = -1\rangle\}$

**Satz:**  $[\underline{H}, e^{\frac{i}{\hbar} \vec{\varphi} \cdot \vec{L}}] = 0 \rightarrow$  dann  $\underline{H}$  entartet auf Multiplett

- diskrete Symmetrien/ Gruppen: Spiegelung, Parität, Punktgruppen, ...
- **Bem.:** Drehoperationen nicht nur für räumliche Drehungen, sondern auch für Spin & Isospin
- Generatoren:  $e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \underline{B}} \underline{B} \hat{=} \text{Generator der Symmetrieop.}$

## 4.3 Symmetrien in der Kernphysik?

a) Energie, Impuls, Drehimpuls

b) Isospin

**Satz:** Starke WW invariant unter Isospin-Rotation, d.h.  $[\underline{H}_s, \underline{t}] = 0$  Casimir-Op.:  $\underline{t}^2, QZ=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

**Bsp.:**

$$\bullet t = \frac{1}{2}, m_t = \pm \frac{1}{2} = \left\{ \begin{array}{c} p \\ n \end{array} \right\} \text{ Isospin-Doublett}$$

$$\bullet t = 1, m_t = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{array} \right\} \text{ Isospin-Triplett, Pionen; } \pi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\pi_1 \pm i\pi_2); \pi^0 = \pi_3$$

**Bem.:** Isospin und Ladung stehen in Zusammenhang  $\rightarrow q = e(m_t + \frac{1}{2})$  siehe p & n

c) elektrische Ladung

**Satz:** el.-mag. WW bricht Isospin-Symmetrie, erhält aber el. Ladung  $[\underline{H}_s + \underline{H}_{em}, \underline{t}] \neq 0$ , aber  $[\underline{H}_s + \underline{H}_{em}, Q] = 0$  mit  $Q = e(\underline{t}^3 + \frac{1}{2}) \rightarrow [\underline{H}_s + \underline{H}_{em}, \underline{t}^3] = 0$

**Bsp.:**



**Satz:** Gell-Mann-Nishijima-Relation:

$$q = e(m_t + \frac{1}{2}y) = e(m_t + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}S)$$

$y$	=Hyperladung
$A$	= Baryonenzahl
$S$	=Strangeness

**d)** weitere diskrete Quantenzahlen

**Satz:** Baryonenzahl: Baryon 1, Antibaryon -1

**Bsp.:**

$$\begin{matrix} n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

nicht möglich:

$$\begin{matrix} n \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

**Satz** Leptonenzahl: in jeder Generation separat Leptonen 1, Antilep. -1

**Bsp.:**

$$\begin{matrix} n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

nicht möglich:

$$\begin{matrix} n \rightarrow p + e^- \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} n \rightarrow p + e^- + \nu_e \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_\mu \\ 0 & 0 & 1_e & -1_\mu \end{matrix}$$

**Bem.:** Was ist mit Neutrinooszillationen zwischen  $\nu$ -Generationen?

**weitere Beispiele**

$$\begin{matrix} \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \\ 1_\mu & 1_e & -1_e & 1_\mu \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \gamma \rightarrow e^- + e^+ \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

**Satz:** Strangeness:  $s$ -quarks -1, Anti 1

**Bsp.:**  $p + p \rightarrow \Lambda^0 + K_0 + p + \pi^+$

#### 4.4 PCT

**Bem.:** Parität  $P$ , Ladungsumkehr(-konjugation)  $C$ , Zeitumkehr  $T$  fundamental

#### 4.4.1 Parität

**Def:** Paritätsoperator  $\underline{P}$  spiegelt Koordinatensystem am Ursprung

$$\begin{array}{ll} \underline{P} : \vec{x} \rightarrow -\vec{x}, \vec{p} \rightarrow -\vec{p} & \text{Vektoren} \\ \vec{L} \rightarrow \vec{L}, \text{ da } \vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} & \text{axialer Vektor} \\ \vec{x}^2 \rightarrow \vec{x}^2 & \text{Skalar} \\ \vec{x} \cdot \vec{L} \rightarrow -\vec{x} \cdot \vec{L} & \text{Pseudoskalar} \end{array}$$

QM:  $\langle \vec{x} | \underline{P} | \varphi \rangle = \langle -\vec{x} | \varphi \rangle, \underline{P}^2 = 1 \rightarrow$  Eigenwerte  $\pm 1$

Kugelflächenfkt:  $\underline{P} |lm\rangle = (-1)^l |lm\rangle$

Streuung zweier Teilchen:

$|\psi\rangle = \sum |a\rangle \otimes |b\rangle \otimes |\psi_{\text{Relativbewegung}}\rangle \{|a\rangle, |b\rangle\}$  charakterisiert innere Freiheitsgrade (Spin, Isospin)

$$\underline{P} |a\rangle = \pi_a |a\rangle, \pi_a \hat{=} \text{Eigenparität}$$

**Def.:**  $\pi(\text{Proton}) = +1$  Bezugspunkt

**Bem.:**

- weitere Eigenparitäten durch Reaktionen
- nicht eindeutig, deshalb:

**Def.:**  $\pi(\text{Neutron}) = \pi(\text{Proton})$

**Bsp.:**  $\pi_j = -1, \pi(w^\pm) = -1, \pi(z^0) = -1$

Angabe  $J^\pi$ , z.B. Grundzst.  ${}^4\text{He}$  ist  $J^\pi = 0^+$

**4.4.1.1 Paritätserhaltung und -verletzung** wenn  $[\underline{H}, \underline{P}] \neq 0$ , dann ist ein Paritätseigenzst. nicht stationär

$(\underline{U} |\varphi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \underline{H} t} |\varphi\rangle$  wenn  $\underline{H} |\varphi\rangle = E |\varphi\rangle$  stationär)

z.B.  $t = 0 |u(0)\rangle = |\text{gerade}\rangle$

$e^{-\frac{i}{\hbar} \underline{H} t} |\psi(0)\rangle = c(t) |\text{gerade}\rangle + d(t) |\text{ungerade}\rangle$

**Idee:** Bestimme  $|\frac{d}{c}|$  durch Zerfall

**Idee:**

- ${}^4\text{He}$  haben Drehimpuls  $L$
- muss zwei Gleichungen erfüllen Drehimpulskopplung und Parität

**Bsp.:** Annahme:  $L = 0 \quad 1 + 0 \rightarrow 1$

$L = 1 \quad 1 + 1 \rightarrow (0, 1, 2), P(-1)^2 = -1$

$L = 2 \quad 1 + 2 \rightarrow (1, 2, 3)$

wenn man den Übergang trotzdem beobachtet, dann ist „ $1^+$ “ gar kein  $1^+$  sondern „ $c \cdot 1^+ + d \cdot 1^-$ “, d.h. Parität nicht erhalten

**Bsp.:**  $L = 0 \quad 1 + 0 \rightarrow 1$

$L = 1 \quad 1 + 1 \rightarrow (0, 1, 2)$

$L = 2 \quad 1 + 2 \rightarrow (1, 2, 3); (-1)^L = 1 \neq$

$L = 3 \quad 1 + 3 \rightarrow (2, 3, 4); (-1)^L = -1!$

$\Rightarrow |F|^2 = |\frac{d}{c}|^2 \leq 10^{-13}$  für die starke WW  $\leq 10^{-9}$  für el.-mag. WW

**Bem.:**

- starke und el.-mag. WW respektieren Parität

**Satz:** In der schwachen Wechselwirkung ist die Parität nicht erhalten (Wu et. al., 1957) → Nobelpreis an Yang und Lee

Reaktion:  ${}^{60}\text{Co} \rightarrow {}^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$

Idee:  $\vec{J} \cdot \vec{p}_1 \xrightarrow{P} -\vec{J} \cdot \vec{p}_1$

Kann also äquivalent nur  $\vec{J}$  (durch Magnetfeld) umklappen.

→ Für entgegengesetzte B-Feldrichtungen unterschiedliche zählraten

→ Verletzung der Paritätserhaltung

**technische Details:**  $J_{Co} = 1 - \begin{cases} -M = -1 \\ -M = 0 \\ -M = 1 \end{cases}$

$$\tilde{H} = -g\mu_N B \tilde{J}^z, \text{EZ} |J = 1, M = \{-1, 0, 1\}\rangle$$

$$Z = \text{Tr} \left( e^{-\beta \tilde{H}} = \sum_M e^{\beta g\mu_N B M} \right)$$

**Wdh:**  $\tilde{R} = e^{-\beta \tilde{H} \frac{1}{2}} - E_2$   $Z = e^{-\beta E_1} + e^{\beta E_2}$

$-E_1$   $U = \text{Tr}(\tilde{H} \tilde{R}) = \frac{1}{Z} (E_1 e^{-\beta E_1} + E_2 e^{-\beta E_2}) = E_1 p_1 + E_2 p_2$

$$p_{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\beta E_1/2}}{Z}$$

Wahrscheinlichkeit für Besetzung eines Niveaus  $p_M = \frac{e^{\frac{g\mu_N B M}{k_B T}}}{Z}$

$$p_{M-1} = \frac{e^{\frac{g\mu_N B M}{k_B T}}}{e^{\frac{g\mu_N B M}{k_B T}} + 1 + e^{-\frac{g\mu_N B M}{k_B T}}} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{g\mu_N B M}{k_B T}} + e^{-2\frac{g\mu_N B M}{k_B T}}}$$

**Ziel:**  $\frac{T}{B}$  sehr klein

**Weg:** adiabatische Magnetisierungskühlung (MCE)

Paramagnet (unabhängige Spins):  $Z = f(\frac{B}{T}) \rightarrow S(T, B) = g(\frac{B}{T})$   $S = \text{konst} \rightarrow \frac{B}{T} = \text{konst}$

#### 4.4.1.2. Helizität der Leptonen

- man lernt:

i. Neutrinos sind vollständig polarisiert

**Satz:** Es gibt keine rechtshändige Neutrinos

→ Das ist die eigentliche Paritätsverletzung

**Bem:**

- Neutrinos müssen sich mit  $c$  bewegen, sonst ex. Inertialsystem, in dem  $\vec{p}$  in entgegengesetzte Richtung zeigt!
- **aber** Neutrinooszillationen ( $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ ) fordern  $m_\mu > 0 \rightarrow$  Lichtgeschw. unmöglich  $\neq$

ii. für weiterführende Studien

**Def.:** schwache Isospin  $\underline{I}$  mit  $|I, I_J\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \nu$ ,  $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = e_L$ ,  $L = \text{links}$

**Satz:** linkshändige Leptonen (allg. Fermionen) bilden Doublets des schwachen Isospins und nehmen an der schwachen WW teil. Die rechtshändigen z.B.  $e_R$ , bilden Singlets und nehmen nicht an der schwachen WW teil. Alle nehmen an der el.-mag. WW teil

- Da man mittels Lorenztransformation linkshändige Elektronen in rechtshändige transformieren kann, müssen el.-mag. und schwache WW zusammenhängen → elektroschwache WW

$\mu$ SR:  $\mu$ on spin votation, Vermessung interner Magnetisierung

$$\pi^+ \rightarrow \underbrace{\mu^+}_{\text{vollst. r.h. pol.}} + \underbrace{\nu_\mu}_{\text{linksh.}}$$

$e^+$  entlang  $\mu^+$ -Spin für max. Energie bei Dreiteilchenzerfall  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$

#### 4.4.2 Ladungskonjugation $C$

**Def.:**  $C|q\rangle = |-q\rangle$ ,  $q$  = additive Quantenzahlen (el. Ladung, Baryonenzahl, Strangeness, ...) d.h.  $C$  Teilchen  $\rightarrow$  Antiteilchen

**Bem.:**

- schwache WW verletzt Paritätserhaltung:  $\nu_L \xrightarrow{P} \nu_R$ , aber  $\nu_R$  ex. nicht
- $\nu_L \xrightarrow{C} \nu_L$ , aber  $\nu_L$  ex. auch nicht, d.h. schwache WW erhält Ladungssym. ebenfalls nicht
- Hoffnung:  $\nu_L \xrightarrow{CP} \nu_R$  würde gehen

**Satz:** Eigenschaften von  $C$

1.  $C^2 = 1$
2.  $[C, Q] = 2CQ \neq 0$  keine gemeinsamen Eigenst. von Ladung und entgegengesetzte Ladung, außer für  $q = 0$ , dann Eigenwert  $\eta_C = \pm 1$

$$\Rightarrow \eta_C(\gamma) = -1, \eta_C(\pi^0) = 1 \Rightarrow 2\gamma, \eta_C(\eta^0) = 1, \eta^0 \rightarrow 2\gamma$$

#### 4.4.3 Die Zeitumkehr

**Def.:**  $T$ :

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -t, dt \rightarrow -dt \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{x} \\ \vec{p} &\rightarrow -\vec{p} \\ \vec{J} &\rightarrow -\vec{J} \end{aligned}$$

**Bem.:** man spricht besser von Bewegungsumkehr

QM: Sei  $[\underline{H}, \underline{T}] = 0$ , dann  $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \underline{H} \underline{T} |\psi\rangle$   
 $\underline{T} |\psi(t)\rangle = |\psi(-t)\rangle$  ? NEIN, sondern  $\underline{T} |\psi\rangle = \langle \psi(-t)|$   
 in einer Darstellung sieht das so aus:  $\underline{T} \psi(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, -t)$   
 $\underline{T}$  macht aus Schrödingergleichung:  $-i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = |\psi(t)\rangle \underline{H}$

**Bem.:**

- $\underline{T}$  ist antiunitär:  $\underline{T}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1^* \underline{T}\varphi_1 + c_2^* \underline{T}\varphi_2$
- $\underline{T}$  hat keine Eigenwerte
- $\underline{T}$  ist genaugenommen kein Operator, der im Hilbertraum wirkt!

**Satz:** Zeitumkehrinvarianz kann experimentell überprüft werden

- Übergangswahrscheinlichkeiten für Hin- und Rückreaktion (detailed balance)
- Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen dürfen kein el. Dipolmoment haben  
 – Messung am Neutron ergibt, dass Verletzung  $\leq 10^{-12}$
- Zeitumkehrinvarianz ist verletzt durch schwache WW (B-Mesonen)

Auswirkungen:

1. Das  $TCP$ -Theorem, d.h.  $[\underline{T}\underline{C}\underline{P}, \underline{H}] = 0 \forall \underline{H}$ , war uninteressant, solange man  $\underline{T}, \underline{C}, \underline{P}$  einzeln für erhalten hielt
2. Wenn  $[\underline{T}\underline{C}\underline{P}, \underline{H}] = 0$ , dann Massen und Lebensdauer zerfallender Teilchen und Antiteilchen gleich. Bester Test:  $m(K^0)$  und  $m(\bar{K}^0)$  unterscheiden sich in 14. Stelle
3. heutige Meinung:  $\underline{T}\underline{C}\underline{P}$ -Invarianz gilt
4. schwache WW verletzt „Alles“, d.h.  $\underline{T}, \underline{C}, \underline{P}$ . Warum? Nicht bekannt!

#### 4.4.3.4. Grobe Erklärung zum el. Dipolmoment

- sihe S.Weinberg oder J. Sakuran
- ohne Beweis:  $\underline{T}^2 |\psi\rangle = (-1)^{ij} |\psi\rangle$ ,  $j$ -Gesamtspin  
wenn  $j$  halbzahlig:  $\underline{T}^2 |\psi\rangle = -|\psi\rangle$  (\*)
- Widerspruchsbeweis:  
sei  $[\underline{H}, \underline{T}] = 0$ ,  $|\psi_E\rangle$  sei Eigenzst. von  $\underline{H}$ , dann ist  $\underline{T}\psi_E$  auch EZ von  $\underline{H}$ ; Annahme:  $\underline{T}\psi_E = e^{-i\alpha}\psi_E$   
 $\rightarrow \underline{T}^2\psi_E = \underline{T}e^{-i\alpha}\psi_E = e^{i\alpha}\underline{T}\psi_E = e^{i\alpha}e^{-i\alpha}\psi_E = \psi_E \neq -\psi_E$ , siehe (\*)

$\rightarrow$  wenn  $[\underline{H}, \underline{T}] = 0$ , dann muss jeder Eigenwert entartet sein (für  $j$  halbzahlig)  $\rightarrow$  Kramersche Entartung

$\rightarrow j = \frac{1}{2}$  hat zwei  $m$ -Zustände, d.h.  $m = \pm \frac{1}{2}$

- eine elektrostatisches Feld ist Zeitumkehrinvariant, d.h. Entartung zwischen  $|j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle$  und  $|j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle$  kann nicht durch elstat. Feld aufgehoben werden  $\rightarrow$  Teilchen hat kein el. Dipolmoment, da sonst Aufspaltung der Energieniveaus
- Magnetfeld kann diese Zst aufspalten,  $\underline{H} = j\mu_B B \underline{j}^z$ , ist also auch nicht zeitumkehrinvariant!

Stromstärke  $\xrightarrow{I} -$ Stromstärke, d.h.  $\vec{B} \xrightarrow{I} -\vec{B}$

Beispiel für Ableitung von Theorien aus Symmetrien

$\underline{H} = \underline{H}$  von vielen Elektronen und Kernen

$\underline{T} : \vec{B} \rightarrow -\vec{B}, \vec{s} \rightarrow -\vec{s}$

$\underline{H} = \underline{H}(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{B}) = J\vec{s}_1\vec{s}_2 + J(\vec{s}_1\vec{s}_2)^2 + g\mu_B\vec{B}\vec{s}_1 + g\mu_B\vec{B}\vec{s}_2$

#### Anmerkungen zur Zeitumkehr

- $\underline{T} |\psi(t)\rangle = \langle \psi(t) |$  für Drehimpuls = 0
- i.A.  $\underline{T}\psi(\vec{x}, t) = e^{i\alpha(j, \dots)} \psi^*(\vec{x}, t)$
- $\underline{T} : \vec{x} \rightarrow \vec{x}, \vec{p} \rightarrow -\vec{p}, \vec{s} \rightarrow -\vec{s}, (\vec{B} \rightarrow -\vec{B}, \vec{E} \rightarrow \vec{E})$
- Dipolmoment:  $\underline{H} \propto \vec{x}\vec{E}, [\underline{H}, \underline{T}] \propto [\vec{x}, \underline{T}] \stackrel{!}{=} 0$

magn. Seeman-Aufspaltung

$\underline{H} \propto \vec{s} \cdot \vec{B}$

$[\underline{H}, \underline{T}] \propto [\vec{s}, \underline{T}] = \underline{sT} - \underline{T}s = 2\underline{sT} \neq 0$ , da  $\vec{s} \rightarrow -\vec{s}$

## 5 Kernmodelle

### 5.1 Vielteilchensysteme: Fermionen und Bosonen

a) Einteilchenzustände

**Bem.:**

- Beschreiben ein Teilchen
- Basis im Hilbertraum:

$$|\psi\rangle = \sum_n \sum_{m_s} \sum_{m_t} \underbrace{|n, m_s, m_t\rangle}_{\text{ONB}} \langle n, m_s, m_t | \psi\rangle$$

$$= \int d^3x \sum_{m_s} \sum_{m_t} |\vec{x}, m_s, m_t\rangle \langle \vec{x}, m_s, m_t | \psi\rangle$$

b) Vielteilchenzustände  $\in \mathcal{H}^{(N)} = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{N \text{ mal}}, N = \text{Teilchenzahl}$

Produktbasis  $\{|n_1, n_{s_1}, m_{t_1}\rangle \otimes |n_2, n_{s_2}, m_{t_2}\rangle \otimes \dots \otimes |n_N, n_{s_N}, m_{t_N}\rangle\}$

c) identische = ununterscheidbare Teilchen

**Def.:** Teilchenvertauschung  $\underline{P}_{ij}$  vertauscht Teilchen  $i$  mit  $j$

**Bsp.:**  $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_N | \psi\rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_N | \psi\rangle$

doppelte Vertauschung  $\underline{P}_{ij}^2 = \mathbb{1} \rightarrow 2$  Eigenwerte  $\pm 1$

**Satz:** Es gibt zwei grundlegende Teilchensorten

a) Fermionen, die durch komplett antisymmetrische Zustände beschrieben werden:

$$\forall i + j : P_{ij} |\psi\rangle = -|\psi\rangle$$

b) Bosonen, die durch komplett symmetrische Zustände beschrieben werden:

$$\forall i, j \text{ mit } i + j : P_{ij} |\psi\rangle = +|\psi\rangle$$

**Satz:** Spin-Statistik-Theorem:

Teilchen mit halbzahligen Spin sind Fermionen, Teilchen mit ganzzahligen Spin sind Bosonen

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{2} \{ |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle - |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle - |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_4\rangle + |\varphi_4\rangle \otimes |\varphi_3\rangle \} \quad (1)$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\varphi_a\rangle \otimes |\varphi_b\rangle + |\varphi_b\rangle \otimes |\varphi_a\rangle \} \quad (2)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \{ |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_4\rangle - |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_4\rangle + |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_4\rangle \otimes |\varphi_3\rangle - |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_4\rangle \otimes |\varphi_3\rangle \} \quad (3)$$

(1) 2 Fermionen, antisym. → Fermionenzustand

(2) 2 Fermionen, sym. → Bosonenzustand

(3) 1,2 sind Fermionen; 3,4 Bosonen → gemischter Zustand

**Satz:** Ideale Vielteilchensysteme können durch Produktst. beschrieben werden

**Bem.:**

- „ideal“-wechselwirkungsfrei, d.h.  $\underline{H} = \sum_{i=1}^N \underline{t}_i + \sum_{i=1}^N \underline{v}_i$ ,  $\underline{t}_i = \frac{\underline{p}^2}{2m}$ ,  $\underline{v}_i \hat{=}$  Container, äußeres Feld etc.  
z.B.  $\frac{1}{2} m \omega^2 \underline{x}_i^2$

→ Eigenzustände von  $\underline{H}$  sind Produktst. von Einteilcheneigenzuständen

**Bsp.:**  $\underline{H} = h_{\text{HO}}^{(1)} + h_{\text{HO}}^{(2)}$ , d.h. 2 Teilchen in einer Dim.  $\underline{h}_{\text{HO}} |n\rangle = \hbar\omega (n + \frac{1}{2})$  Eigenst.

0. unterscheidbare Teilchen:  $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$   $E_{n_1 n_2} = \hbar\omega (n_1 + \frac{1}{2} + n_2 + \frac{1}{2})$

1. Fermionen:  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle - |n_2\rangle \otimes |n_1\rangle) = |n_1 n_2\rangle_a$   $a = \text{antisym.}$

2. Bosonen:  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle + |n_2\rangle \otimes |n_1\rangle) = |n_1 n_2\rangle_s$   $s = \text{sym.}$

$${}_a \langle n_1 n_2 | \underline{H} | n_1 n_2 \rangle_a = \hbar\omega (n_1 + \frac{1}{2} + n_2 + \frac{1}{2})$$

$${}_s \langle n_1 n_2 | \underline{H} | n_1 n_2 \rangle_s = \hbar\omega (n_1 + \frac{1}{2} + n_2 + \frac{1}{2})$$

**Def:** Antisymmetrisierungsoperator  $\underline{A}$  :

$$\underline{A} [|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_N\rangle] = \frac{1}{N!} \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) |\varphi_{\pi(1)}\rangle \otimes |\varphi_{\pi(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{\pi(N)}\rangle \quad (*)$$

$\pi \hat{=}$  Permutation

**Def:**  $\text{sign}(\pi)$  : Einer Konfiguration wird ein Vorzeichen, z.B. „+“ zugeordnet; jedes Vertauschen zweier Elemente bringt ein relatives Minuszeichen

$\pi$	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	$\text{sign}(\pi)$
1	1	2	3	+
2	1	3	2	-
3	3	1	2	+
4	3	2	1	-
5	2	1	3	+
6	2	3	1	-

$$\underline{A} [|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_3\rangle] = \frac{1}{6} \{ |\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\rangle - |\varphi_1 \varphi_3 \varphi_2\rangle + |\varphi_3 \varphi_1 \varphi_2\rangle - |\varphi_3 \varphi_2 \varphi_1\rangle - |\varphi_2 \varphi_1 \varphi_3\rangle + |\varphi_2 \varphi_3 \varphi_1\rangle \}$$

**Bem.:**

- $\underline{A}$  ist ein Projektor
- die Zst. (\*) sind nicht normiert
- (\*) ist Def. einer Determinanten, Slater-Determinante

**Satz:** Pauliprinzip: Zwei identische Fermionen können nicht im gleichen Einteilchenzustand sein.

**Bew:**  $\underline{A}[|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_N\rangle] = 0$

**Def.:** Symmetrisierungsoperator  $\underline{S}$

$$\underline{S}[|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_N\rangle] = \frac{1}{N!} \sum_{\pi} |\varphi_{\pi(1)}\rangle \otimes |\varphi_{\pi(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{\pi(N)}\rangle \quad (**)$$

**Bsp.:**  $\underline{S}[|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_3\rangle] = \frac{1}{6} \{ |\varphi_1\varphi_2\varphi_3\rangle + |\varphi_1\varphi_3\varphi_2\rangle + |\varphi_3\varphi_1\varphi_2\rangle + |\varphi_3\varphi_2\varphi_1\rangle + |\varphi_2\varphi_1\varphi_3\rangle + |\varphi_2\varphi_3\varphi_1\rangle \}$

**Bem.:**

- $\underline{S}$  ist ein Projektor
- Zustände (\*\*) nicht normiert
- vollst. symmetr. Zst. haben keinen Namen

## 5.2 Kanonisches Ensemble nichtwechselwirkender Fermionen oder Bosonen in eindim. harmonischen Oszillator

a) ein Teilchen:  $\underline{H} = \hbar\omega(\underline{a}^+ \underline{a} + \frac{1}{2}) \rightarrow E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), n = 0, 1, 2, \dots$

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta \underline{H}}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar\omega(n + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2 \sinh[\frac{\beta \hbar\omega}{2}]}$$

$$U = \frac{1}{Z} \text{Tr}(\underline{H} e^{-\beta \underline{H}}) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$U = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left[\frac{\beta \hbar\omega}{2}\right] \rightarrow C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{k_B}{(k_B T)^2} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \frac{1}{\sinh^2\left[\frac{\beta \hbar\omega}{2}\right]}$$

b)  $N$  unterscheidbare Teilchen ( $\hat{=}$   $N$  unterscheidbare Oszillatoren)

$$\underline{H} = \hbar\omega(\underline{a}_1^+ \underline{a}_1 + \frac{1}{2} + \underline{a}_2^+ \underline{a}_2 + \frac{1}{2} + \dots + \underline{a}_N^+ \underline{a}_N + \frac{1}{2}) \rightarrow E_{\vec{n}} = \hbar\omega(n_1 + \frac{1}{2} + n_2 + \frac{1}{2} + \dots + n_N + \frac{1}{2})$$

$$Z_N = Z^N \rightarrow U_N = N \cdot U, C_N = N C$$

$$\sum_{n_1 n_2} e^{-\beta \hbar\omega(n_1 n_2)} = \left(\sum_{n_1} e^{-\beta \hbar\omega n_1}\right) \left(\sum_{n_2} e^{-\beta \hbar\omega n_2}\right) = \left(\sum_{n_1} e^{-\beta \hbar\omega n_1}\right)^2$$

**Bem.:**

- einfaches Festkörpermodell, Schwingungen der Atome um Ruhelagen  
→ Einsteinmodell: qm, gleiches  $\omega$
- klass. Grenzfall  $C^{DP} = 3N k_B$  Dulong-Petit

c)  $N$  Fermionen im HO  $\underline{H} = \hbar\omega[\underline{a}_1^+ \underline{a}_1 + \frac{1}{2} + \underline{a}_2^+ \underline{a}_2 + \frac{1}{2} + \dots + \underline{a}_N^+ \underline{a}_N + \frac{1}{2}]$

Eigenzst. sind Slaterdeterminanten

**Bsp.:**  $N = 2$ ; Produktzst.  $|n_1 n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$

$$\Rightarrow \text{Slaterdet.} : \underline{A} |n_1 n_2\rangle = \frac{1}{2} \{ |n_1 n_2\rangle - |n_2 n_1\rangle \}$$

a)  $n_1 \neq n_2$  Pauli

$$\text{b) } \underline{A} |n_2 n_1\rangle = -\underline{A} |n_1 n_2\rangle$$

$\Rightarrow$  Eigenzustände:  $\underline{A} |n_1 n_2 n_3 \dots n_N\rangle$  mit  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_N$

**Bsp.:**  $N = 2 \quad Z_Z^F = \text{Tr} \left( e^{-\beta H} \right) = \sum_{n_1 < n_2} \frac{\langle n_1 n_2 | \hat{A}^+ e^{-\beta H} \hat{A} | n_1 n_2 \rangle}{\langle n_1 n_2 | \hat{A}^+ \hat{A} | n_1 n_2 \rangle} = \dots = \sum_{n_1 < n_2} e^{-\beta \hbar \omega (n_1 + \frac{1}{2} + n_2 + \frac{1}{2})}$

$$\begin{aligned} Z_N^F &= \sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_N} e^{-\beta \hbar \omega (n_1 + \frac{1}{2} + n_2 + \frac{1}{2} + \dots + n_N + \frac{1}{2})} \\ &= \sum_{n_1, n_{12}, n_{23}, n_{34}, \dots} e^{-\beta \hbar \omega (\frac{N}{2} + N n_1 + (N-1) n_{12} + (N-2) n_{23} + \dots + n_{(N-1)N} + \frac{N(N-1)}{2})} \\ &= e^{-\beta \hbar \omega \frac{N^2}{2}} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - e^{-n \beta \hbar \omega}} \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} n_2 &= n_1 + 1 + n_{12}, \quad n_{12} = 0, 1, 2 \\ n_3 &= n_2 + 1 + n_{23} \\ &= n_1 + 2 + n_{12} + n_{23} \\ n_4 &= n_3 + 1 + n_{34} \\ &= n_1 + 3 + n_{12} + n_{23} + n_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow U_N^F &= E_0(N) + \sum_{n=1}^N n \frac{\hbar \omega}{2} [\coth(n \beta \frac{\hbar \omega}{2}) - 1] \\ C_N^F &= \frac{k_B}{(k_B T)^2} \sum_{n=1}^N \left( n \frac{\hbar \omega}{2} \right) \frac{1}{\sinh^2[n \frac{\beta \hbar \omega}{2}]} E_0(N) = \hbar \omega \frac{N^2}{2} \end{aligned}$$

### 5.3 Besetzungszahldarstellung

- bisher: Basis im N-Teilchenraum:  $\hat{A} |\phi_1, \phi_1, \dots, \phi_N\rangle$  Fermionen,  $\hat{S} |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle$  Bosonen

**Satz: Besetzungszahldarstellung:**  $|n_1 n_2 n_3 n_4 \dots\rangle_{F/B}$  ist der antisym./sym. Vielteilchenzustand mit  $n_1$  Teilchen im ersten ETZ,  $n_2$  im zweiten usw.  
 $\Rightarrow$  Teilchenzahl  $N = \sum_i n_i$

**Bsp.:** 5 Bosonen, ET-Basis = HO-Basis  
 $\rightarrow |3, 0, 1, 1, 0, \dots\rangle_B$

**Satz:** Fermionen:  $n_i = 0, 1$ ; Bosonen:  $n_i = 0, 1, 2, \dots$

**Bsp.:** Fermionen, Spin  $\frac{1}{2}$ , HO-Basis  
 Auf jedem Energieniveau gibt es 2 Zustände:  $|n, \uparrow\rangle$  und  $|n, \downarrow\rangle$

$$\left| \underbrace{1}_{\text{in } |0, \uparrow\rangle}, 0, \underbrace{1}_{\text{in } |1, \uparrow\rangle}, \underbrace{1}_{\text{in } |1, \downarrow\rangle} \right\rangle_F$$

**Bem.:**

- zweite Quantisierung
- Raum  $\hat{=}$  FOCK-Raum  $\mathcal{H}_{\text{Fock}} = \{ \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots \}$

a) Bosonen

**Satz:**  $b_k^+, b_k$  sind Erzeuger bzw. Vernichter eines Teilchens im ETZ k.

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k | \dots, n_k, \dots \rangle &= \sqrt{n_k} | \dots, (n_k - 1), \dots \rangle \\ \tilde{b}_k^+ | \dots, n_k, \dots \rangle &= \sqrt{n_k + 1} | \dots, (n_k + 1), \dots \rangle \\ \tilde{b}_k^+ \tilde{b}_k | \dots, n_k, \dots \rangle &= n_k | \dots, n_k, \dots \rangle \quad \text{Teilchenzahlop.} \\ [\tilde{b}_k, \tilde{b}_l^+] &= \delta_{kl} \\ [\tilde{b}_k, \tilde{b}_l] &= [\tilde{b}_k^+, \tilde{b}_l^+] = 0 \end{aligned}$$



b) Fermionen

**Satz:**  $a_k^+, a_k$  sind Erzeuger bzw. Vernichter eines Fermions im ETZ k.

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k |\dots, n_k = 1, \dots\rangle &= |\dots, n_k = 0, \dots\rangle, \tilde{a}_k |\dots, n_k = 0, \dots\rangle = 0 \\ \tilde{a}_k^+ |\dots, n_k = 0, \dots\rangle &= |\dots, n_k = 1, \dots\rangle, \tilde{a}_k^+ |\dots, n_k = 1, \dots\rangle = 0 \\ \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k |\dots, n_k = 0, \dots\rangle &= n_k |\dots, n_k, \dots\rangle \text{ Teilchenzahl im ETZ k} \\ [\tilde{a}_k, \tilde{a}_l^+] &= \{\tilde{a}_k, \tilde{a}_l^+\} = \tilde{a}_k \tilde{a}_l^+ + \tilde{a}_l^+ \tilde{a}_k = \delta_{kl} \text{ Antikommutator} \\ [\tilde{a}_k, \tilde{a}_l] &= [\tilde{a}_k^+, \tilde{a}_l^+] = 0 \end{aligned}$$

⇒ Vielteilchenzustände

Bosonen:  $|n_1 n_2 \dots\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} \prod_k (\tilde{b}_k^+)^n |0\rangle$

Fermionen:  $|n_1 n_2 \dots\rangle_F = \prod_k (\tilde{a}_k^+)^n |0\rangle$

**Satz:**  $|0\rangle \hat{=} \text{Vakuum}$

**Bem.:** Operatoren werden jetzt mit Hilfe der Erzeuger und Vernichter dargestellt.

**Bsp.:**

$$\tilde{T} = \sum_i \frac{\tilde{p}_i^2}{2m} = \sum_{k, k'} \langle k | \tilde{t} | k' \rangle \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_{k'} = \sum_{\vec{p}, m_s} \underbrace{\langle \vec{p} | \tilde{t} | \vec{p} \rangle}_{\frac{\tilde{p}^2}{2m}} \tilde{a}_{\vec{p}, m_s}^+ \tilde{a}_{\vec{p}, m_s} \text{ mit } \tilde{t} = \frac{\tilde{p}^2}{2m}$$

### 5.4 Großkanonisches Ensemble idealer Quantengase

**Def.: Großkanonische Zustandssumme:**  $Z = Tr(e^{-\beta(H - \mu N)})$ ,  $\beta = \frac{1}{k_B}$

**Bem.:**

- $\tilde{H}$  ist ET-Op.

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \sum_{k, k'} \langle k | \tilde{h} | k' \rangle \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_{k'} = \sum_i \langle i | \tilde{h} | i \rangle \tilde{a}_i^+ \tilde{a}_i = \sum_i \varepsilon_i \tilde{a}_i^+ \tilde{a}_i \\ \tilde{N} &= \sum_k \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k \longrightarrow = \sum_i \tilde{a}_i^+ \tilde{a}_i \end{aligned}$$

$$\tilde{H} |n_1, n_2, \dots\rangle_{F/B} = \sum_i \varepsilon_i n_i |n_1, n_2, \dots\rangle_{F/B}$$

$$\tilde{N} |n_1, n_2, \dots\rangle_{F/B} = \sum_i n_i |n_1, n_2, \dots\rangle_{F/B}$$

$$\begin{aligned} Z &= Tr(e^{-\beta(\tilde{H} - \mu \tilde{N})}) = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} e^{-\beta(E(n_1, n_2, \dots) - \mu N(n_1, n_2, \dots))} \\ &= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} e^{-\beta(n_1(\varepsilon_1 - \mu) + n_2(\varepsilon_2 - \mu) + n_3(\varepsilon_3 - \mu) + \dots)} \text{ unabhängige Summen} \\ &= \sum_{n_1} e^{-\beta n_1(\varepsilon_1 - \mu)} \cdot \sum_{n_2} e^{-\beta n_2(\varepsilon_2 - \mu)} \cdot \dots = \prod_{i=1}^{\infty} z_i \text{ mit } z_i = \sum_{n_i} e^{-\beta n_i(\varepsilon_i - \mu)} = \sum_{n_i} [e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}]^{n_i} \end{aligned}$$

Fermionen:  $n_i = 0, 1 \rightarrow z_i = 1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}$

Bosonen:  $n_i = 0, 1, 2, \dots \rightarrow z_i = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}} \mu < \varepsilon_i \forall i$

Mittlere Besetzungszahl des Einteilchenzustandes k

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k \rangle &= \langle \langle \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k \rangle \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k e^{-\beta(H-\mu N)} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial(\beta\mu)} \ln z_k \\ &= \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} \pm 1} = \bar{n}_k \end{aligned}$$

+  $\hat{=}$  FD; -  $\hat{=}$  BE

Bosonen:  $\mu < \varepsilon_{\min}$

Fermionen:  $\mu \in \mathbb{R}$

hier sei  $\mu > 0$ : Alle untersten Energieniveau sind besetzt.

- innere Energie:  $U = \langle \langle \sum_k \varepsilon_k \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k \rangle \rangle = \sum_k \bar{n}_k \varepsilon_k$
- mittlere Teilchenzahl:  $\bar{N} = \langle \langle \sum_k \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k \rangle \rangle = \sum_k \bar{n}_k$

## 5.5 Das ideale Fermigas

**Bem.:**

- Modellsystem, unendlich ausgedehnt, Dichte  $\rho$
- Annahmen (erschaunlicherweise) für viele Systeme gerechtfertigt; Elektronen im Festkörper, Nukleonen im Kern

$$\begin{aligned} \underline{H} = \underline{T} &= \sum_{\vec{k}, m_s, m_t} \langle \vec{k}, m_s, m_t | \underline{t} | \vec{k}, m_s, m_t \rangle \tilde{a}_{\vec{k}, m_s, m_t}^+ \tilde{a}_{\vec{k}, m_s, m_t} \\ \underline{t} | \vec{k}, m_s, m_t \rangle &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} | \vec{k}, m_s, m_t \rangle \end{aligned}$$

Translationsoperator  $\underline{T} : 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \dots, n \rightarrow 1$

$\underline{T}^n = \mathbb{1}$ , Eigenwerte:  $e^{i \frac{2\pi\kappa}{n}}$ ,  $\kappa = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$

in physikalischen Einheiten:  $\frac{2\pi\kappa}{n} = k \cdot a \Rightarrow k = \frac{2\pi\kappa}{na} = \frac{2\pi}{L} \kappa$  mit  $na = L$  und  $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n}{2}$

**Bem.:**

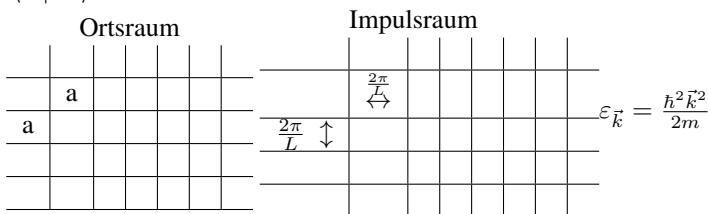
- $k \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ , diskret
- mit  $L \rightarrow \infty, a = \text{const}, (n \rightarrow \infty)$

$\rightarrow$   $k$ -Werte werden immer dichter

im 3-dim:  $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Einteilchenwellenfunktion:  $\langle \vec{x} | \vec{k} \rangle = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$



**Def.:** im Grundzust. verteilen sich  $N$  Fermionen auf die niedrigsten ET-Energieeigenzustände unter Beachtung des Pauliprinzip. Die Fermienergie ist die höchste besetzte ET-Energie.

**Def.:** Fermiimpuls:  $p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}$ ,  $\hbar k_F = p_F$

Kontinuumsmlimes:

$$\sum_k \{\cdot\} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \sum_k \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \{\cdot\} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \sum_k \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \{\cdot\} \Rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int dk_x dk_y dk_z \{\cdot\}$$

$T = 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \langle \langle \tilde{N} \rangle \rangle = \sum_{\vec{k}, m_s, m_t} \bar{n}_{\vec{k}, m_s, m_t} \\ &= (2s+1)(2t+1) \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk \\ &= (2s+1)(2t+1) \frac{4\pi L^3 \frac{1}{2} k_F^3}{8\pi^3} = \frac{\mu_{st}}{2} \frac{L^3 k_F^3}{3\pi^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k_F^3 = \frac{2}{\mu_{st}} 3\pi^2 \frac{\bar{N}}{L^3} = \frac{6\pi^2}{\mu_{st}} \rho$$

$$k_F = \left(\frac{6\pi^2}{\mu_{st}} \rho\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{\mu_{st}} \rho\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$T = 0 : U = U_0 = \sum_{\vec{k}, m_s, m_t} \varepsilon_{\vec{k}} \bar{n}_{\vec{k}} = \mu_{st} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{3}{5} \bar{N} \varepsilon_F$$

## 5.6 Der Kern als Fermigas

jetzt:

- Nukleonen mit  $s = \frac{1}{2}$   $kt = \frac{1}{2} \rightarrow \mu_{st} = 4$
- $\bar{N} = A$

$\Rightarrow$  Fermienergie:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi\rho}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_N r_0^2} \approx 40 \text{ MeV};$$

$$\text{mit: } \rho = \frac{A}{V}, V \approx \frac{4}{3}\pi r_0^3 A, r_0 = 1,128 \text{ fm},$$

$$p_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{r_0} \approx 265 \frac{\text{MeV}}{c}$$

**Bem.:**

1.  $E_A = \frac{3}{5} \varepsilon_F A \approx A$
2.  $\frac{E_A}{A} = \frac{3}{5} \varepsilon_F \approx 24 \text{ MeV}$  größenordnungsmäßig o.K. vgl. Volumenterm
3.  $\frac{E_A}{A} \ll m_N c^2$ , d.h. nichtrelativistisches Rechnen war o.K.
4. Es werden keine Asymmetrieeffekte berücksichtigt

Idee: Kern besteht aus 2 Fermigasen: Protonen & Neutronen

$$\bar{N}_1 = Z, \bar{N}_2 = N$$

$$\varepsilon_{F,p} = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_p r_0^2} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{2}{3}}, \varepsilon_{F,n} = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_n r_0^2} \left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U_0 = E &= \frac{3}{5}(\varepsilon_{F,p}Z + \varepsilon_{F,n}N) = \frac{3}{5} \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2r_0^2} \frac{1}{A^{\frac{2}{3}}} \left( \frac{Z^{\frac{5}{3}}}{m_p} + \frac{N^{\frac{5}{3}}}{m_n} \right) \\ &= E_A + \Delta E, \quad \Delta E = \frac{3}{5} \varepsilon_F \left( \frac{2}{A} \right)^{\frac{2}{3}} \left[ Z^{\frac{5}{3}} + N^{\frac{5}{3}} - 2 \left( \frac{A}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \\ &\quad \text{mit } T_3 = \frac{1}{2}(Z - N) \rightarrow \Delta E = \Delta E(A, T_3) \text{ wird in } T_3 \text{ entwickelt} \\ \Rightarrow \frac{E}{A} &\approx \frac{3}{5} \varepsilon_F \left( 1 + \frac{5}{9} \left( \frac{Z - N}{A} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

**Bem.:**  $Z = N$  energetisch am günstigsten

## 5.7 Das Schalenmodell

**Bem.:**

- Fermigas = unendlich ausgedehnte Kernmaterie
- keine magischen Zahlen, z.B.  $\mathbb{Z} \in \{2, 8, 20, 28, 50, 82\}$ ,  $\mathbb{N} \in \{2, 8, 20, 28, 50, 82, 126\}$
- Kerne mit mag. Z. sind stabiler, haben höher liegende Anregungen und kleinere Neutroneneinfangquerschnitte (vgl. Edelgase)
- keine gerade/ ungerade-Effekte

**Lösung:**

$$\underline{H} = \sum_i \underline{t}_i + \sum_{i < j} \underline{v}_{ij}$$

$\underline{v}_{ij}$  bestimmen, dann alles ausrechnen wäre super, aber:

1.  $v_{ij}$  wird aus Streuexperimenten + Deuteron abgeleitet → leider nicht eindeutig
2. Vielteilchenquantensystem leider auch nicht lösbar

**Idee:** Ersetze  $\underline{H}$  durch Näherung aus Einteilchenoperatoren

$$\underline{H} = \sum_i \underline{t}_i + \sum_{i < j} \underline{v}_{ij} = \sum_i (\underline{t}_i + \underline{v}_i) + \underbrace{\left( \sum_{i < j} \underline{v}_{ij} - \sum_i \underline{v}_i \right)}_{\text{möglichst klein}} \approx \sum_i (\underline{t}_i + v(\vec{r}_i))$$

Eine solche Ersetzung gilt natürlich nur in einem begrenzten (Energie-) Bereich und auch nur für bestimmte Observable  
Ex. Methoden,  $v_i$  näherungsweise und selbstkonsistent zu bestimmen, z.B. Hartree-Fock

- Kastenpotential:  $V(\vec{r}) = \begin{cases} -v_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$
- harmonischer Oszillator:  $V(\vec{r}) = \begin{cases} -v_0 \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$

**Bem.:**

- für analytische Ergebnisse nimmt man oft die nicht abgeschnittenen Potentiale.
- iii. Woods-Saxon-Potential:  $V(\vec{r}) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-a}{b}}}$   $a \approx 0, 5\text{fm}$   
abgeleitet aus dem Dichteprofil großer Kerne ( $A > 20$ )

**Bem.:**

- kugelsym. Potentiale → kugelsym. Kerne
- für  $p$  &  $n$  können unterschiedliche Pot. genommen werden

**Lösung:** Kugelkoordinaten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_p} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_p(\vec{r}) - V_{o,p} \psi_p(\vec{r}) = E_p \psi_p(\vec{r}) \text{ ebenso } n$$

$$\psi_p(\vec{r}) = R_{p,nl}(r) Y_{p,lm}(\vartheta, \varphi)$$

$\Rightarrow E_{nl}$  hängen ab von radialer QZ  $n = 0, 1, 2, \dots$  und Drehimpulsqz ( $l = 0, 1, 2, \dots$ )  $E_{nl}$  hängen nicht von  $m_e = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$  und  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  ab  $\rightarrow 2 \cdot (2l+1)$ -fache Entartung

a) Kastenpotential

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2 (X_{nl})^2}{2m R^2} \quad X_{nl} \text{ ist } n\text{-te Nullstelle von } j_l, \text{ der } l\text{-te sphärische Besselfkt.}$$

$(n, l)$	$X_{nl}$	# Zustände	$\sum$ bis hier
1s	3,14	2	2
2p	4,49	6	8
1d	5,76	10	20
2s	6,28	2	34
1f	6,99	14	58
2p	7,73	6	64
1g	8,18	18	82

b) Harmonischer Oszillator

- $E_{nl} = \hbar\omega \left\{ 2(n-1) + l + \frac{3}{2} \right\} \omega^2 = \frac{2v_0}{mR^2}$

- Entartung: alle  $(n, l)$ -Kombinationen entartet, für die  $2(n-1) + l = n_{\text{tot}}$ , mal  $\underbrace{(2s+1) \cdot (2l+1)}_{=2}$

$(n, l)$	$E_{nl}$	# Zustände	$\sum$ bis hier
1s	$\frac{3}{2} \hbar\omega$	2	2
1p	$\frac{5}{2} \hbar\omega$	6	8
2s, 1d	$\frac{7}{2} \hbar\omega$	10	20
2p, 1f	$\frac{9}{2} \hbar\omega$	20	40
3s, 2d, 1g	$\frac{11}{2} \hbar\omega$	30	70

c) Woods-Saxon-Potential

**Bem.:**

- wird numerisch gelöst
- magische Zahlen: 2,8,20,42,60,92,138

$\rightarrow$  Kugelsym. Einteilchenpot. beschreiben (nur) kleine Kerne gut

## 5.8 Schalenmodell mit Spin-Bahn-Kopplung

**Bem.:**

1. qualitativ o.k.

2.  $\beta$ -Stabilität wird erklärt

3.  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ; volle  $j$ -Schalen liefern:  $J_{\text{Kern}} = 0$  &  $\prod_{l, m_l} (-1)^l = +1$  Parität  $j \rightarrow l + \frac{1}{2}$  v  $l - \frac{1}{2}$   
für alle  $j$ -Schalen

$$\Rightarrow J^\pi = o^+ \text{ z.B. } \frac{16}{8}O$$

4. ein Nukleon zusätzlich zur vollen  $j$ -Schale:  $ng$ -, bzw.  $gn$ -Kerne

$$J^\pi = j^\pi \text{ vom zusätzlichen Nukleon, z.B. } \frac{17}{8}O: 1n \text{ in } 1d_{\frac{5}{2}} \rightarrow \frac{5}{2}^+ (l=2)$$

$$\text{ANALOG: ein Lochzst. in voller Schale, z.B. } \frac{15}{8}O: \frac{1}{2}^- \hat{=} \text{Loch in } 1p_{\frac{1}{2}}$$

5. Da Kerneigenzustände definierte Parität haben, d.h.  $\psi(\vec{r}) = \pm \psi(\vec{r})$  und Dipoloperator negative Parität hat  $\rightarrow$

$$\langle \psi | \vec{D} | \psi \rangle \propto \int d^3r \psi^*(\vec{r}) \vec{r} \psi(\vec{r}) = 0$$

$\rightarrow$  exp. sehr gut bestätigt

## 5.9 Deformierte Einteilchenpotentiale

Idee:

- nicht rotationssym.
- z.B.  $\omega_x = \omega_y \neq \omega_z$  im H.O.,  $\delta = -1 + \frac{\omega_z}{\omega_x}$  kennzeichnet Deformation
- Nilsson-Modell

## 5.10 Die volle Lösung – erster Versuch

Idee:

$$\underline{H} = \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{s}_i, \vec{s}_j, \vec{t}_i, \vec{t}_j)$$

Potentiale: Paris, Bonn, Argonne-18

Basis:  $A [|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_A\rangle]$ ;  $|\varphi_1\rangle = |n(\omega), m_s, m_t\rangle$  Einteilcheneigenzst. eines HO mit  $\omega$

Idee:

- korrelierte Basisfunktionen

$$\rightarrow \Phi = \mathcal{CA} [|\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_A\rangle]$$

$$\text{slaterdet} \rightarrow \delta^{(2)}(\vec{R}, \vec{r})$$

a)  $\mathcal{Q} \hat{=} \prod_{i < j} f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$  Jastrow

## 5.11 Exotische Kerne

a. doppelt magische Kerne

- besonders stabil, z.B.  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{68}\text{Ca}$ ,  $^{100}\text{Sn}$
- $^{100}\text{Sn}$  interessant, da  $Z = N$ , aber eigentlich schon zu viele  $p$  (Coulomb); aber Schalenabschluss stabilisiert zusätzlich
- Kerne im Umgebung zerfallen durch  $p$ -Emission,  $^{100}\text{Sn}$  durch  $\beta^+$ -Zerfall  $t_{\frac{1}{2}} = 1\text{s}$ , nachgewiesen am FRS@GSI

b. Halo-Kerne

- Kerne mit sehr vielen  $n$  (oder  $p$ ), die ungewöhnliche langreichweitige Dichteverteilungen haben
- $^{11}\text{Li}$ ,  $^{14}\text{C}$  ( $^{14}\text{C}$ ,  $^{13}\text{F}$ )  $^{11}\text{Li}$  FRS@GSI
- Bsp. für Protonenhalo:  $^8\text{B}$ :  $sp + 3n$

## 5.12 Das Deuteron ( $^2\text{H} \hat{=} d$ )

Bem.:

- neben Auswertung von  $p + n$ -,  $p + p$ -,  $n + n$ - Streudaten ist das Deuteron ein wichtiges exakt lösbares Zwei-Nukleonensystem, mit dem die Kernkräfte untersucht werden können

Eigenschaften:

- entdeckt 1932 durch Urey
- Kern des schweren Wasserstoffs  $^2\text{H}$
- Masse  $E_B = (2, 22456671 \pm 0, 00000039)\text{MeV}$  ← kleinste Bindungsenergie pro Nukleon  $m_d = 1875, 613 \frac{\text{MeV}}{c^2}$
- es ex. kein angeregter gebundener Zst.; d.h. Anregung führt zu nichts oder zur Zerstörung des Deuterons
- $J^\pi = 1^+$ , magn. Dipolmoment  $\mu_d = 0, 857\mu_N$ ,  $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$
- el. Quadrupolmoment  $Q = 0, 282\text{efm}^2$
- Diproton, Dineutron und ( $p - n$  mit  $J = 0$ ) ungebunden

**Ziel:** Wollen Nukleon-WW ableiten

a)  $J = 1$ :

$$|\psi_{yz}\rangle = \sum_{n,l,s=0,1} C_{nls}^0 |\varphi_{nls}; T=0, M_T=0\rangle + \sum_{m,l,s=0,1} C_{m ls}^1 |\varphi_{m ls}; T=1, M_T=0\rangle$$

←  $T = 1$ -Zustände sind typischerw. 10MeV höher

→ Grundzst des  $d$  ist reiner  $T = 0$ -Zustand

-  $J = 1$  und  $S = 0, 1; l = 0, 1, 2$

$T = 0$  (antisymm.):  $S = 1$  (symm.) nur mit  $l = 0, 2$  (\*)  
 $S = 0$  (antis.) nur mit  $l = 1$  (\*\*)

$$\underbrace{C_{n01}^0 \neq 0}_{(*)}, \underbrace{C_{n21}^0 \neq 0}_{(*)}, \underbrace{C_{n10}^0 = ?}_{**}$$

$$[\underline{H}, \underline{S}] = 0, \text{ d.h. } [\underline{H}, \underline{S}^2] = 0$$

$$\langle S = 0 | [\underline{H}, \underline{S}^2] | S = 1 \rangle = \langle S = 0 | \underline{H} | S = 1 \rangle \hbar^2 (1 \cdot (1+1) - 0 \cdot (0+1)) \stackrel{!}{=} 0$$

→  $\perp$  zu  $S = 1$  Zst. gehört zu einem angeregt. Zst., d.h. im GZ  $C_{n10}^0 = 0$

→ WF:  $l = 0$  &  $l = 2$ -Anteile;  $S=1$  (el. Quadrupol)

- Beiträge der WW:  $V^Z(r), V^{LS}(r) \cdot \vec{l} \cdot \vec{S}, V^T S_{12}, S_{12} = \frac{3}{r^2} (\vec{r} \cdot \vec{s}_1)(\vec{r} \cdot \vec{s}_2) - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$
- $V(r) \rightarrow$  Ansätze; erste Idee: Yukawa  $V(r) \sim \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}$   
 abgeleitet aus Mesonenaustausch;  $\lambda \hat{=} \text{de Broglie-Wellenlänge des } \pi$

## 6 Neutronensterne

### 6.1 Eine kühne Extrapolation von Nicolas Borghini

**Idee:** Bethe-Weizsäcker-Formel + Gravitation

- Gravitation:  $F_g = \frac{3}{5} G \frac{m^2}{R}, m$  Gesamtmasse,  $R$  Radius
- Neutronenstern:  $A \approx N \gg Z$
- groß, d.h.  $A$  groß, vernachlässige alles, das nicht wenigstens mit  $A$  geht  
 $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}, m = A m_N$

$$E_B \approx a_v A - \frac{a_A}{4} A + \frac{3}{5} G \frac{m_N^2}{r_0} A^{\frac{5}{3}} \stackrel{!}{>} 0 \quad \text{für gebunden}$$

$$\frac{3}{5} G \frac{m_N^2}{r_0} A^{\frac{2}{3}} > \frac{a_A}{4} - a_v = 7,4 \text{ MeV}, r_0 = 1,128$$

$$\rightarrow A > 4 \cdot 10^{55} \rightarrow R > 4 \text{ km}, m > 7 \cdot 10^{28} \text{ kg} \propto 0,035 \underbrace{M_\odot}_{\text{Sonnenmasse}}$$

**Bem.:**

- erstaunlich gut, richtige Größenordnung
- vernachlässigt relativistische Effekte, z.B. Bindungsenergie wirkt auch gravitativ und Bindungsenergie ist von der Größenordnung der Ruhemasse
- Extrapolation der BW-Formel bis  $10^{55}$ !  
 → Eigenschaften der Kernkräfte, dichte Packung, durch BW-Formel schon recht gut wiedergegeben

## 6.2 Entstehung und Eigenschaften von Neutronensternen

**Bem.:** wikipedia gut

Entstehung:

- i. Stern mit 1,4 – 3 Sonnenmassen; Kern-Kollaps-Supernova (II, Ib, Ic)
  - $M > 3M_{\odot} \rightarrow$  schwarzes Loch
  - $M < 1,4M_{\odot} \rightarrow$  weißer Zwerg (Supernova)
- ii. Kern-Kollaps: Kernfusion bis  $Fe$  &  $Ni$ ; Fusion endet; Strahlungsdruck kann Gravitation nicht mehr kompensieren
- iii. Im Kern
  - extreme Gravitation:  $\delta \nearrow \nearrow \nearrow$
  - Atome werden komprimiert $\rightarrow p + e^{-} \rightarrow n + \nu_e$
- iv. Hülle
  - extreme  $\nu$ - und Neutronenschauer
  - Energiebilanz: Gewinn an kin. Energie durch Absinken im Gravitationspotential  $\rightarrow$  kin. E. von  $\nu$  &  $n$
  - $\nu$  &  $n$  heizen Hülle auf;  $n$  führen zur Nukleosynthese jenseits des  $Fe$  (r-Prozess)
  - Absprennen der Hülle innerhalb weniger Tage
- v. Drehimpulserhaltung
  - $R_N \sim \frac{R_0}{100.000} \rightarrow$  Rotationsfreq. steigt auf  $f \sim 100 \dots 1.000$  Hz
- vi. Aufbau

$$\begin{aligned} \rho &\sim 10^{15} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} && \text{im Kern} \\ \rho &\sim 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} && \text{in der Mitte (der Hauptbestandteil)} \\ \rho &\sim 10^{11} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} && \text{außen (Kruste)} \\ \rho &\sim 10^7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} && \text{auf der Schale (Oberfläche)} \end{aligned}$$

- a. Hauptbestandteil ( $\Delta r \sim 9\text{km}$ )
  - relativistisches Neutronengas mit wenigen  $p + e^{-}$
  - $\beta^{-}$ -Zerfall nicht möglich, da keine weiteren Elektronenzustände erreichbar (im Gegensatz zu Kernen kommen die  $e^{-}$  nicht raus)
  - $n$  und  $p$  bilden Fermigas; wahrscheinlich  $n$ -suprafluid,  $p$ -supraleitend
  - entartetes Fermigas verhindert weiteren Gravitationskollaps (Druck)

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2 \rho}{(2s+1)(2t+1)} \right)^{\frac{2}{3}} \propto \rho^{\frac{2}{3}}, \quad E_0 = \frac{3}{5} E_F \cdot A$$

$$E_G = \gamma \frac{M^2}{R} = \gamma M^2 \left( \frac{\rho}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \propto \rho^{\frac{1}{3}} \quad \text{„Entartungsdruck“ gewinnt gegen „Gravitationsdruck“}$$

- b. Oberfläche
  - Gleichgewicht zu  $e^{-} + p$  verschoben  $\rightarrow Fe$ -Kerne,  $e^{-}$ ,  $n$
  - Eisenkristallgitter (10m dick)
  - mit zunehmender Tiefe steigt  $n$ -Anteil; es liegen neutronenreiche  $Fe$ -Isotope vor, die unter Normalbed. instabil wären
- c. Innere Kruste (1-2 km)
  - $Fe$ -Anteil  $\searrow 0$ ,  $n$ -Anteil  $\nearrow 100$
- d. Kern (0...3km) spekulativ!
  - $\rho$  bis  $3 \cdot \rho_0$  (Kerndichte von Pb), Verhalten bei dieser Dichte unbekannt und nicht experimentell überprüfbar

**Vermutung:**



- a)  $\pi$ - oder  $k$ -Mesonengas; Bosonen; kein Fermidruck  $\rightarrow$  Kollaps zum schw. Loch?
- b) Quark-Gluon-Plasma (Suppe aus Quarks und Gluonen)
  - $u$ -,  $d$ - und  $s$ -Quarks  $\rightarrow$  seltsame Sterne
  - $\rightarrow$  kann schneller rotieren;  $f \sim 2$  kHz wäre Hinweis

vii. Exotische Eigenschaften

- ex. Eigenschaften folgen aus Tatsache, dass Neutronensterne fast schwarze Löcher sind
  - a)  $M = 1,4 \dots 3M_{\odot}$ ,  $R \sim 10 \dots 20$  km
    - $\rightarrow g_n \sim 10^{11} \dots 10^{12} g_{\text{Erde}} \rightarrow$  Gewicht!
    - $\rightarrow$  Freier Fall aus 1m Höhe:  $r \sim 1\mu\text{s}$ ,  $v \sim 7 \cdot 10^6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
    - $\rightarrow$  höchster Berg 1 mm
      - extreme Lichtablenkung
  - b) -  $t_0 \sim 10^{11}$  K kühlt auf  $10^9$  K ab
    - supraleitend unter  $10^{11}$  K
  - c)  $B$ 
    - $B \sim 10^8$  T (NMRI  $\sim 5$  T, Labor  $\sim 40$  T)
    - $v_{\text{Hall}} \sim 10^{18}$  V Hallspannung
  - d) Pulsar