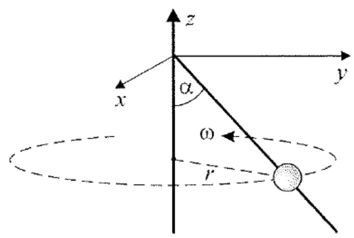
Aufgabenblatt 8

8.1 Rutschende Perle auf einem rotierenden Draht

Eine Perle bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf einem geneigten Draht, der sich um eine vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht.



a. Stellen Sie die Lagrangegleichungen in Zylinderkoordinaten r, ϕ und z auf. Wieviele Zwangsbedingungen erhalten Sie in diesen Koordinaten? Koppeln Sie die Zwangsbedingungen mittels Lagrangeparametern an und bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.

b. Lösen Sie die Differentialgleichungen und bestimmen Sie die Zwangskräfte.

c. Stellen Sie die Gesamtenergie der Perle dar und zeigen Sie, dass der Zuwachs durch die von der einen Zwangskraft verrichteten Arbeit stammt.

d. Warum leisten die restlichen Zwangskräfte keine Arbeit?

Diese Aufgabe ist anspruchsvoll. Nehmen Sie ruhig ein Buch zur Hand.

8.2 Lösung des harmonischen Oszillators mittels Poisson-Klammern

Die Poisson-Klammern zweier klassischer Observabler sind wie folgt definiert

$$[f, g] \equiv \{f, g\} \quad := \quad \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) . \tag{1}$$

Dabei sind q_i die generalisierten Koordinaten und p_i die generalisierten Impulse.
Mit Hilfe der Poisson-Klammern kann man die Zeitentwicklung des harmonischen Oszillators bestimmen. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

a. Stellen Sie die Hamilton-Funktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit der Frequenz ω auf.

b. Stellen Sie zum Vergleich erst einmal die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.

c. Nehmen Sie nun an, Sie kennten die Funktion $x(t)$. Entwickeln Sie diese Funktion in eine Taylor-Reihe und bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten über Poisson-Klammern mit der Hamiltonfunktion.

d. Führen Sie die gleiche Prozedur für $p(t)$ durch.

e. Vereinfachen Sie die entstandenen Reihen.

f. Stellen Sie die Phasenraumkurve dar, die sich ergibt, wenn der Oszillator die Energie E hat. Kann man die Darstellung durch geschickte Koordinatenwahl vereinfachen?

8.3 Hamilton-Funktion und klassische Zustandssumme

Die Hamilton-Funktion eines klassischen Systems ist der Ausgangspunkt zur Berechnung der statistischen Eigenschaften dieses Systems im thermodynamischen Gleichgewicht. Dabei lautet die kanonische Zustandssumme für ein System, das mittels einer Koordinate und eines Impulses beschrieben wird

$$Z(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, \mathrm{d}q\ \exp\{-\beta H(p,q)\}\ . \tag{2}$$

Für höherdimensionale Systeme muss das Integral entsprechend erweitert werden. $\beta = 1/(k_B T)$ ist die inverse Temperatur.
Die innere Energie und andere statistische Mittel berechnen sich dann wie folgt

$$U(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, \mathrm{d}q\ H(p,q)\ \exp\{-\beta H(p,q)\}\ . \tag{3}$$

a. Stellen Sie die Hamilton-Funktion für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator der Frequenz ω auf. Bestimmen Sie für diesen Oszillator die Zustandssumme, die innere Energie und die Wärmekapazität $C = \partial U/\partial T$.

b. Erinnern Sie sich an den Gleichverteilungssatz? Was sagt der Gleichverteilungssatz aus? Vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis.

c. **Z**usatzaufgabe: Nehmen Sie jetzt an, daß das Potential nicht quadratisch in x ist, sondern proportional zu x^4. Bestimmen Sie Zustandssumme, innere Energie und Wärmekapazität für diesen Fall.

8.4 Zusatzaufgabe: Gekoppelte harmonische Oszillatoren IV

Zum Abschluss behandeln wir noch einmal die Kette aus N identischen harmonischen Oszillatoren der Masse m mit der Kreisfrequenz ω und periodischen Randbedingungen.

a. Benennen Sie die Auslenkungen der Massen m aus ihren Ruhelagen mit $q_1 \ldots q_N$. Stellen Sie die Hamiltonfunktion für das System der gekoppelten Oszillatoren auf. Benutzen Sie, dass sich die potentielle Energie zweier Oszillatoren q_i und q_j als

$$v_{ij} \;=\; \frac{1}{2}\, m\omega^2\; (q_i - q_j)^2 \tag{4}$$

schreiben lässt.

b. Die Hamiltonfunktion kann jetzt geschickt umgeschrieben werden, indem man die potentielle Energie mit einer Kopplungsmatrix wie folgt schreibt

$$V \;=\; \frac{1}{2}\, m \sum_{i,j} q_i D_{ij} q_j = \frac{1}{2}\, m\, \vec{q}^{\,T} \cdot D \cdot \vec{q}\ . \tag{5}$$

Bestimmen Sie die Matrix D.

c. Damit hat die Hamiltonfunktion am Ende die folgende Gestalt

$$H \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\, \vec{q}^{\,T} \cdot D \cdot \vec{q}\ . \tag{6}$$

Dabei ist $p_i = m\dot{q}_i$ in diesem Fall. Stellen Sie sich jetzt vor, es gibt eine unitäre Transformation U mit $\vec{Q} = U\vec{q}$, die die potentielle Energie in Diagonalform überführt, d.h.

$$V \;=\; \frac{1}{2}\, m \sum_{k=0}^{N} \omega_k^2\, Q_k^2\ . \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass die kinetische Energie bei dieser Transformation Diagonalform behält.

d. Verwenden Sie jetzt wieder die folgenden Eigenfunktionen des Verschiebeoperators

$$Q_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{i\frac{2\pi\, k\, j}{N}} q_j\ , \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1\ . \tag{8}$$

Zeigen Sie zuerst, dass

$$q_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi\, k\, l}{N}} Q_k \tag{9}$$

die Rücktransformation ist. Verwenden Sie dazu

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi\, k\,(j-l)}{N}} \;=\; \delta_{j,l}\ . \tag{10}$$

e. Setzen Sie jetzt (9) in (5) ein und bestimmen Sie die Eigenwerte $\omega(k)$.

Mit dieser Aufgabe haben Sie ein ziemlich komplexes Problem gelöst. Sie haben die Dispersionsrelation von Phononen (Gitterschwingungen) in einer Raumdimension berechnet. k ist (in geeigneten Einheiten) die Wellenzahl, also der Impuls dieser Phononen. Wenn Sie $\omega(k)$ gegen $k = -N/2 \ldots 0 \ldots N/2$ auftragen, was geht, da $\omega(k)$ in k symmetrisch, erhalten Sie das sogenannte diskrete Energieband von eindimensionalen akustischen Phononen.