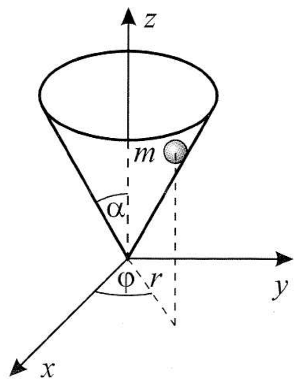
Aufgabenblatt 7

7.1 Teilchen in Kreiszylinder

Eine Punktmasse m gleitet reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels (umgedrehte Schultüte).



a. Stellen Sie die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten auf. Nutzen die Zwangsbedingung zur Eleminierung der z-Koordinate.

b. Leiten Sie die Bewegungsggleichungen ab.

c. Es gibt zwei Erhaltungsgrößen in diesem Problem. Welche sind das?

d. Wie lautet das Integral für $r(t)$ und wie das für $\phi(t)$ unter Verwendung der Erhaltungsgrößen?

e. Was denken Sie, wie die Bewegung aussieht? Beschreiben Sie die Bewegung.

7.2 Lenz-Vektor

Der Lenzsche Vektor kann wie folgt definiert werden

$$\vec{A} \;=\; \dot{\vec{r}} \times \vec{L} + V(r)\vec{r} \ . \tag{1}$$

a. Berechnen Sie die Zeitableitung des Lenz-Vektors. Nutzen Sie dabei die Drehimpulserhaltung und schreiben Sie $\ddot{\vec{r}}$ mit Hilfe des Potentials um.

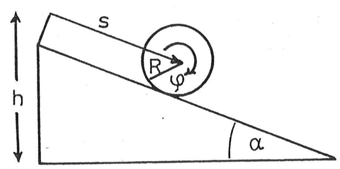
b. Für welche Potentialformen ist der Lenz-Vektor eine Erhaltungsgröße?

c. Berechnen Sie den Betrag von $\vec{A}$.

d. Wohin zeigt der Lenz-Vektor für $V(r) \propto 1/r$? Fertigen Sie eine Skizze an.

7.3 Abrollender Vollzylinder

Ein Vollzylinder soll auf einer schiefen Ebene ohne Schlupf abrollen. Diese Bewegung kann man einerseits unter Nutzung holonomer Zwangsbedingungen und andererseits durch Reduktion auf eine generalisierte Koordinate beschreiben.



a. Stellen Sie die Lagrangefunktion in den Koordinaten s und ϕ sowie den zugehörigen Geschwindigkeiten auf. Dazu benötigen Sie die Rotationsenergie eines Zylinders. Suchen Sie sich das mal raus. Eventuell hatten Sie das auch in der Experimentalphysik behandelt.

b. Formulieren Sie die Zwangsbedingung.

c. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen mit der Zwangsbedingung auf.

d. Differenzieren Sie die Zwangsbedingung so, dass Sie $\ddot{s}$ durch $\ddot{\phi}$ ausdrücken, damit eliminieren Sie $\ddot{\phi}$ in der Differentialgleichung für ϕ. Die erhaltene Relation zwischen $\ddot{s}$ und dem Lagrange-Parameter λ setzen Sie in die DGL für s ein. Das gibt jetzt λ als Funktion von m, g und α.

e. Berechnen Sie die Zwangskräfte. Wie könnte man diese interpretieren?

f. Wie lauten die endgültigen Bewegungsgleichungen für s und ϕ? Wie lauten die Lösungen $s(t)$ und $\phi(t)$?

g. Lösen Sie jetzt das Problem noch einmal, aber ohne Zwangskräfte, d.h. indem Sie eine Koordinate eliminieren.