Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik I WS 2011/2012	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 6

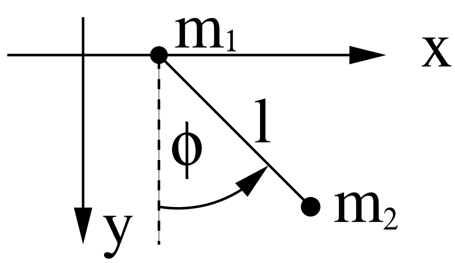
6.1 Selbststudium: d'Alembertsches Prinzip

Studieren Sie als Ersatz für die Vorlesung am 26. November 2011 das d'Alembertsche Prinzip, das auch Prinzip der virtuellen Verrückungen genannt wird. Sie finden dies in praktisch jedem Mechanikbuch, z.B. im online-Nolting auf den Seiten 12-19.

6.2 Selbststudium: Forminvarianz der Euler-Langrange-Gleichungen unter Punkttransformationen

Eine weitere schöne Eigenschaft der Euler-Langrange-Gleichungen besteht darin, dass sie unter Koordinatentransformationen (Punkttransformationen) forminvariant bleiben, das heißt, immer gleich aussehen. Studieren Sie als Ersatz für die Vorlesung am 26. November 2011 die Herleitung dieser Invarianz. Sie finden dies in praktisch jedem Mechanikbuch, z.B. im online-Nolting auf Seite 20. Alternativ können Sie auch die englischsprachige Vorlesung von Herrn Carsten Petersen am 18. November 2011 um 16.15 Uhr in D01-249 besuchen, allerdings haben Sie die eine Seite vermutlich schneller durchgelesen.

6.3 Schwingende Hantel



Eine Hantel bestehe aus den beiden Massen m_1 und m_2 im Abstand l. Die Masse m_1 der Hantel kann sich reibungsfrei entlang einer horizontalen Geraden bewegen. Auf beide Massen wirke die Schwerkraft in y-Richtung.

a. Stellen Sie zuerst die Lagrangefunktion in günstigen Koordinaten auf. Wieviele Koordinaten braucht man zur Definition der Lagrangefunktion?

b. Gibt es in Ihrer Formulierung der Lagrange-Funktion eine zyklische Koordinate? Wie lautet die zugehörige Erhaltungsgröße? Wenn Sie keine zyklische Koordinate finden, versuchen Sie es doch mit „günstigeren" Koordinaten.

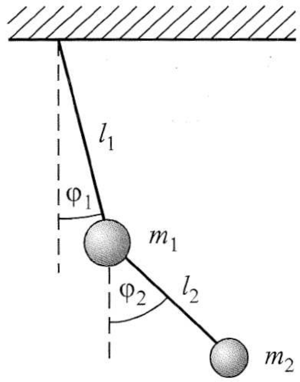
c. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen auf.

d. Wählen Sie als Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\phi(0) = \phi_0$ und $\dot{\phi}(0) = 0$ und lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Nähern Sie dabei $\cos(\phi) \approx 1$ und $\sin(\phi) \approx \phi$.

e. Welche Kurven beschreiben die Massen m_1 und m_2?

6.4 Ebenes Doppelpendel

Zwei Massen m_1 und m_2 sind in in Form eines Doppelpendels mit den Längen l_1 und l_2 unter dem Einfluß der Erdanziehung aufgehängt, siege Graphik.



a. Stellen Sie die Lagrangefunktion in geeigneten generalisierten Koordinaten auf.

b. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.

c. Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Schwingungen ($\sin(\phi) \approx \phi$, $\cos(\phi) \approx 1$, $\dot{\phi}^2\phi \approx 0$) und den Spezialfall $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$. Das ist eine gute Gelegenheit, ein einschlägiges Lehrbuch zur Hand zu nehmen.

d. Wie sieht unter diesen Annahmen die Schwingung für die Anfangsbedingungen $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$, $\dot{\phi}_2(0) = 0$ und $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_0$ aus?

e. **Zusatzaufgabe:** Integrieren Sie die ursprünglichen, d.g. nicht genäherten Bewegungsgleichungen z.B. mit Mathematica numerisch auf für $\phi_1(0) = 3, \phi_2(0) = 2$, $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$, $l_1 = l_2 = 1$ m, $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 1$ kg.

6.5 Zusatzaufgabe: Gekoppelte harmonische Oszillatoren III

N identische harmonische Oszillatoren der Masse m seien in einer Kette mit der Kreisfrequenz ω aneinander harmonisch gekoppelt. Die Schwingungen erfolgen alle entlang einer Geraden, d.h. in einer Dimension. Um schon mit einer kleinen Zahl harmonischer Oszillatoren eine unendliche Kette simulieren zu könne, nutzt man sogenannte periodische Randbedingungen, d.h. der letzte Oszillator hängt nicht an der Wand, sondern wechselwirkt wieder mit dem ersten, der auch nicht an der Wand hängt, über eine Feder. Man kann sich das als Ring vorstellen.

a. Erstellen Sie eine Skizze des Aufbaus. Benennen Sie die Auslenkungen der Massen m aus ihren Ruhelagen mit $q_1 \dots q_N$. Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für $q_1 \dots q_N$ auf.

b. Diese Bewegungsgleichungen kann man vektoriell schreiben. Führen Sie dazu den Vektor $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ ein. Die rechte Seite ist eine Matrix.

c. Dieses physikalische Problem hat eine wundervolle analytische Lösung. Dazu betrachtet man einen Operator T, der alle Oszillatoren um einen Platz verrückt, d.h. $q_1 \Rightarrow q_2$, $q_2 \Rightarrow q_3$, $\dots$, $q_N \Rightarrow q_1$. Wie sieht der Verschiebeoperator T als Matrix aus?

d. Für den Verschiebeoperator gilt $T^N = 1$. Daraus ergibt sich, dass seine Eigenwerte die komplexen Zahlen

$$z_k = \exp\left\{-i\frac{2\pi k}{N}\right\} \ , \qquad k = 0, \dots, N-1 \tag{1}$$

sind. k ist hier ein Index, nicht die Federkonstante. Die Vektoren

$$\vec{Q}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2\pi\, k}{N}}\ T\right)^{\nu} \vec{q} \tag{2}$$

sind nicht nur Eigenvektoren von T, sondern lösen auch die Differentialgleichung! Zeigen Sie dies für $N = 2$ und $N = 3$ und bestimmen Sie die Eigenwerte $\omega(k)$. Wenn Sie es allgemein zeigen können, gibt es von mir eine Tüte Gummibärchen!