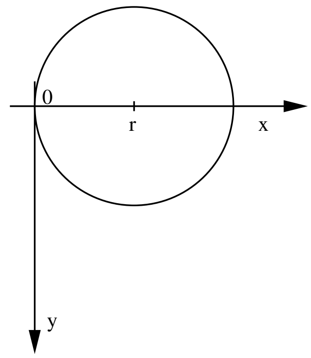
| | | |
|---|---|---|
| Universität Bielefeld | Theoretische Physik I | Prof. Dr. Jürgen Schnack |
| Fakultät für Physik | WS 2011/2012 | jschnack@uni-bielefeld.de |

# Aufgabenblatt 5

## 5.1 Ringbahn




Eine Perle der Masse $m$ bewege sich reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft – $\vec{g} = g\vec{e}_y$ – auf einer ringförmigen Bahn.

a. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf. Verwenden Sie dazu eine geeignete verallgemeinerte Koordinate.

b. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung auf und leiten Sie die Bewegungsgleichung für die verallgemeinerte Koordinate her.

c. Die Perle ruhe zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung. In welcher Zeit durchläuft sie den unteren Halbkreis, wenn dieser den Radius $r = 1$ m hat?

## 5.2 Lagrangefunktion und Euler-Lagrange-Gleichung

a. Geben Sie die Lagrangefunktion eines isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators und die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen in kartesischen Koordinaten an.

b. Geben Sie die Lagrangefunktion eines isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators und die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen in Kugelkoordinaten an.

c. Geben Sie die Lagrangefunktion und die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen für die Bewegung im homogenen Schwerefeld an der Erdoberfläche an.

## 5.3 Die magische Lösung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

a. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w^2 x = 0 \tag{1}$$

hat mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ die allgemeine Lösung

$$x(t) = v_0 G(t) + x_0 H(t), \tag{2}$$

wobei die Funktionen $G(t)$ und $H(t)$ wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} \\ H(t) &= \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} \\ p_{1/2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Man kann durch Einsetzen zeigen, dass die Funktion (2) Lösung der Differentialgleichung (1) ist. Das ist natürlich ästetisch unbefriedigend und lässt einen Teil der Menschheit nicht zur Ruhe kommen.

b. **Deshalb:** Beweisen Sie **vorwärts**, dass (2) Lösung der Differentialgleichung (1) ist. Das geht wie folgt. Machen Sie wie in der Vorlesung einen Schwingungsansatz mit $\exp(pt)$, Sie bekommen dann eine quadratische Gleichung für $p$ mit zwei Lösungen $p_1$ und $p_2$. Damit können Sie die allgemeine Lösung der Diffentialgleichung aufstellen, sie lautet

$$x(t) = a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t}\ . \tag{4}$$

Jetzt nutzen Sie noch die beiden Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$, um die noch unbekannten Parameter $a_1$ und $a_2$ festzulegen, und siehe da, nachdem Sie die Lösung sortiert haben, kommt die magische Formel (2) heraus.

## 5.4 Zusatzaufgabe: Gekoppelte harmonische Oszillatoren II

$N$ identische harmonische Oszillatoren der Masse $m$ seien in einer Kette mit der Federkonstanten $k$ aneinander harmonisch gekoppelt. Die erste und die letzte Masse sind mit den gleichen Federn mit statischen Wänden verbunden. Die Schwingungen erfolgen alle entlang einer Geraden, d.h. in einer Dimension.

a. Erstellen Sie eine Skizze des Aufbaus. Benennen Sie die Auslenkungen der Massen $m$ aus ihren Ruhelagen mit $q_1 \dots q_N$. Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für $q_1 \dots q_N$ auf.

b. Diese Bewegungsgleichungen kann man vektoriell schreiben. Führen Sie dazu den Vektor $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ ein. Die rechte Seite ist eine Matrix.

Wie kann man jetzt auf die Lösung kommen? Denken Sie daran, dass die Normalschwingungen Linearkombinationen der $q_i$ sind. Wie sieht die Differentialgleichung in diesen Normalkoordinaten aus? Finden Sie jetzt die Lösung? Denken Sie an Lineare Algebra! Bestimmen Sie für $N = 2$ und $N = 3$ die Eigenfrequenzen und skizzieren Sie die Normalmoden.