Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik I WS 2011/2012	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 4

4.1 Auftrieb, Gaußscher Satz

Ein starrer Körper sei in einer inkompressiben Flüssigkeit ganz oder teilweise untergetaucht. Mit Ω werde der untergetauchte Bereich (bzw. der Bereich der verdrängten Flüssigkeit) und mit $\partial\Omega$ die umschließende Oberfläche bezeichnet. Die Flüssigkeit hat die konstante Dichte ρ, und infolge der Schwerkraft herrscht in ihr der hydrostatische Druck

$$p_h = -\rho\, g\, z \tag{1}$$

mit $-z$ als Eintauchtiefe. Demzufolge wirkt auf ein Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$ des eingetauchten Körpers die Auftriebskraft

$$-\vec{e}_z \cdot p_h\, \mathrm{d}\vec{A} \tag{2}$$

und insgesamt der Auftrieb

$$F_{\text{Auftrieb}} = -\int_{\partial\Omega} \vec{e}_z \cdot p_h\, \mathrm{d}\vec{A}\ . \tag{3}$$

a. Man beweise, daß

$$F_{\text{Auftrieb}} = Mg \tag{4}$$

mit M als Gesamtmasse der verdrängten Flüssigkeit.

b. Man berechne die Querkraft $\vec{F}_{\text{Quer}}$

$$\vec{F}_{\text{Quer}} = -\vec{e}_x \int_{\partial\Omega} \vec{e}_x \cdot p_h\, \mathrm{d}\vec{A} - \vec{e}_y \int_{\partial\Omega} \vec{e}_y \cdot p_h\, \mathrm{d}\vec{A}\ . \tag{5}$$

4.2 Gekoppelte harmonische Oszillatoren I

Zwei identische harmonische Oszillatoren (ohne Reibung und Antrieb) mit der Federkonstanten k und Massen m seien harmonisch gekoppelt, d.h. mit einer weiteren Feder der Stärke k_{12} verbunden. Die Schwingungen erfolgen alle entlang einer Geraden, d.h. in einer Dimension.

a. Erstellen Sie eine Skizze des Aufbaus. Benennen Sie die Auslenkungen der beiden identischen Massen m aus ihren Ruhelagen mit q_1 und q_2. Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für q_1 und q_2 auf.

b. Die Bewegungsggleichungen können durch Superpositionen von $q_1(t)$ und $q_2(t)$ entkoppelt werden. Stellen Sie zu diesem Zweck die Differentialgleichungen für $Q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ und $q(t) = q_1(t) - q_2(t)$ auf und geben Sie die allgmeine Lösung für $Q(t)$ und $q(t)$ an.

c. Transformieren Sie jetzt die allgemeine Lösung auf die ursprünglichen Koordinaten $q_1(t)$ und $q_2(t)$ zurück.

d. Skizzieren Sie die Schwingungen $q_1(t)$ und $q_2(t)$ für die beiden Spezialfälle $Q(t) = 0$ und $q(t) = 0$.

4.3 Ballonflug im Alpenvorland

Ein Heißluftballonfahrer benutzt einen Ballon in Form einer großen Milchkuh mit einem Volumen von $V_{\mathrm{Ballon}} = 5000\mathrm{m}^3$. Er schwebt in der neutral geschichteten Troposhäre. Neutrale Schichtung bedeutet, daß die Dichte ρ und die Temperatur T wie folgt von der Höhe z über dem Erdboden abhängen:

$$T(z) \quad = \quad T_0\,(1 - z/L) \tag{6}$$

$$\rho(z) \quad = \quad \rho_0 (1 - z/L)^{2.5} \text{ , mit } \quad \rho_0 = \frac{m\,p_0}{k_B\,T_0} \tag{7}$$

und $L = 29.83$ km. Dabei ist $k_B \approx 1.3805 \cdot 10^{-23}$ J/K die Boltzmannkonstante und $m = 28.84/(6.023 \cdot 10^{26})$kg die mittlere Masse eines Luftmoleküls. Ballonhülle und Fracht haben zusammen die Masse $M_{\mathrm{Last}} = 500$ kg. Es sei $p_0 = 1000$ Hektopascal und $T_0 = 290$ K.
In welcher Höhe z_0 schwebt der Ballon, wenn die Ballontemperatur auf 10% über der Umgebungstemperatur gehalten wird? Käme man über die Alpen?
Anleitung: z_0 werde als mittlere z-Koordinate des Ballons gemäß

$$\rho(z_0) \quad =: \quad \frac{1}{V_{\mathrm{Ballon}}} \int_{\mathrm{Ballon}} \mathrm{d}V_{\vec{r}}\; \rho(z) \tag{8}$$

definiert. Auf ein nach außen gerichtetes Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}_{\vec{r}}$ der Ballonhülle wirkt die Kraft $-p(z)\mathrm{d}\vec{A}_{\vec{r}}$, die durch den Luftdruck $p = p(z)$ verursacht wird. Die resultierende Gesamtkraft kann man durch z_0 ausdrücken, wenn man den Gaußschen Satz und die hydrostatische Grundgleichung

$$\frac{\partial\, p}{\partial\, z} \quad = \quad -\rho\, g \tag{9}$$

mit $g = \mathit{const}$ benutzt. Diese resultierende Kraft ist dem Gesamtgewicht von Ballonhülle, Gasinhalt und Fracht – also

$$-g\left(M_{\mathrm{Last}} + \int \mathrm{d}V_{\vec{r}}\; \rho_{\mathrm{Ballon}}\right) \cdot \vec{e}_z \tag{10}$$

gleichzusetzen. Man kann die ideale Gasgleichung

$$\rho_{\mathrm{Ballon}} \quad = \quad \frac{mp(z)}{k_B\; T_{\mathrm{Ballon}}} = \rho(z)\frac{T(z)}{T_{\mathrm{Ballon}}} \tag{11}$$

verwenden. Mit (7) hat man dann die Bestimmungsgleichung für z_0.