| | | |
|---|---|---|
| Universität Bielefeld<br>Fakultät für Physik | Theoretische Physik I<br>WS 2011/2012 | Prof. Dr. Jürgen Schnack<br>jschnack@uni-bielefeld.de |

# Aufgabenblatt 3

## 3.1 Schräger Wurf

a. Ein Junge wirft einen Ball im Winkel von $30^o$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s schräg nach oben? Welche Höhe erreicht der Ball und wie weit fliegt er? Nehmen Sie dazu an, dass das Erdsystem in diesem Fall mit guter Näherung als Inertialsystem betrachtet werden kann und die Bewegung reibungsfrei erfolgt.

b. Unter welchem Winkel muss ein Körper abgeworfen werden, um bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit die maximal mögliche Weite zu erreichen. Begründen Sie Ihre Antwort. Wie hängt die maximale Weite von der Geschwindigkeit ab?

c. Tiger Woods schlägt an Loch 7 im Artland Golfclub ($\psi = 52^o$) einen Golfball unter einem Winkel von $45^o$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 200 km/h gerade nach Norden. Der Ball soll reibungsfrei fliegen. Kann man in solch einem Fall die Corioliskraft vernachlässigen? Wie weit weicht der Aufschlagpunkt bei Berücksichtigung der Corioliskraft von dem ohne Corioliskraft ab? Wenn Sie keine analytische (Näherungs-) Lösung des Problems finden, können Sie die Bewegungsgleichungen auch mit Mathematica etc. aufintegrieren.

## 3.2 Raketengleichung

In der folgenden Aufgabe soll die Raketengleichung abgeleitet werden. Zusätzlich soll untersucht werden, ob und warum mehrstufige Raketen günstiger sind. Dazu sollen folgende Größen verwendet werden: $\mu$ sei der Massestrom der Triebwerke, d.h. die ausgestoßene Masse pro Zeit. Diese Masse werde mit der Geschwindigkeit $u_{\text{Treib}}$ relativ zur Rakete ausgestoßen. Da die Geschwindigkeit der Rakete immer exakt entgegengesetzt der Geschwindigkeit der ausgestoßenen Gase ist, ist es nicht nötig, mit dreidimensionalen Vektoren zu rechnen.

a. Leiten Sie die Raketengleichung aus dem Impulserhaltungssatz in seiner differentiellen Form ab. Für die Rakete gilt:

$$m(t)\, \mathrm{d}v \;=\; -u_{\text{Treib}}\, \mathrm{d}m \; . \tag{1}$$

Hier ist es jetzt wichtig, dass die Masse von der Zeit abhängt. Setzen Sie diese Abhängigkeit ein. Trennen Sie die Variablen und integrieren Sie von Null bis $t$ auf. Die Masse der Rakete beim Start betrage $m_{\text{Start}}$. Die Masse am Ende des Brennvorgangs sei $m_{\text{End}}$.

b. Nehmen Sie jetzt an, dass die Rakete zweistufig ist, wobei $m_{\text{End}} = 0.1 m_{\text{Start}}$ sei. Die Masse der ersten Stufe ohne Treibstoff, also die Hülle sei ebenfalls $0.1 m_{\text{Start}}$; die restliche Masse ist der auf beide Stufen gleich verteilte Treibstoff. Vergleichen Sie die Endgeschwindigkeit mit der, die mit einer einstufigen Rakete mit $m_{\text{End}} = 0.2 m_{\text{Start}}$ erreicht werden kann.

## 3.3 Foucault-Effekt

a. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w^2 x = 0 \tag{2}$$

hat mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ die allgemeine Lösung

$$x(t) = v_0 G(t) + x_0 H(t), \tag{3}$$

wobei die Funktionen $G(t)$ und $H(t)$ wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} \\ H(t) &= \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} \\ p_{1/2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Funktion (3) Lösung der Differentialgleichung (2) ist. Nutzen Sie dabei aus, dass der entstandene (etwas längliche) Term aus vier linear unabhängigen Bestandteilen besteht, die getrennt verschwinden müssen.

b. Die Bewegung eines Foucault-Pendels geringer Amplitude läßt sich in der $x - y$-Ebene durch die folgende Differentialgleichung beschreiben

$$\ddot{z} + 2\, i\, \omega\, \sin\psi\, \dot{z} + \omega_0^2\, z = 0 \ , z = x + i\, y \ . \tag{5}$$

Dabei sind $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, $\psi$ die geographische Breite und $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ die Kreisfrequenz der Pendelschwingung. Das Foucault-Pendel der Universität Osnabrück hat eine Pendellänge von $l = 19,5$ m. Die Stadt Osnabrück hat die Koordinaten $8^o 3' 2''$ östlicher Länge, $52^o 16' 28''$ nördlicher Breite.

Bestimmen Sie die Werte der notwendigen Konstanten, geben Sie die Bahnkurven an und stellen Sie diese mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms (z.B. Mathematica) graphisch dar für die Anfangsbedingung (i) $x(0) = x_0 = 1$ m und $\dot{x}(0) = 0$ sowie (ii) $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0 = 0,7$ m/s. Die Anfangswerte der jeweiligen $y$-Komponenten seien Null.