

Aufgabenblatt 1

1.1 Bewegung im Schwerfeld der Erde

Betrachten Sie die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g} \quad (1)$$

eines Teilchens im Schwerfeld der Erde nahe der Erdoberfläche. Im kartesischen Koordinatensystem weise die z -Achse nach oben, d.h. $\vec{g} = (0, 0, -g)$.

- Wie lautet das allgemeine Orts-Zeit-Gesetz $\vec{r}(t)$, wenn das Teilchen zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ startet?
- Zeigen Sie, dass die Bewegung in einer festen Ebene erfolgt.
- Welche Richtung hat die Flächennormale der Bahnebene?

1.2 Koordinatentransformationen

- Wie lassen sich Kugelkoordinaten mit Hilfe von kartesischen Koordinaten darstellen?
- Wie lautet die Umkehrtransformation?
- Stellen Sie sich vor, ein Fahrzeug fährt auf der Erdoberfläche entlang des nullten Längengrades vom Nordpol zum Südpol mit konstanter Geschwindigkeit. Die Erde wird dabei als Kugel mit dem Radius R_E betrachtet. Wie kann man diese Bewegung in kartesischen Koordinaten und wie in Kugelkoordinaten darstellen?

1.3 Kinematik in krummlinigen Koordinaten

Ausgehend von kartesischen Koordinaten x, y, z seien die Koordinaten χ, ψ, ϕ wie folgt eingeführt ($l > 0$):

$$\begin{aligned}x &= l \cos \psi \cosh \chi \cos \phi \\y &= l \cos \psi \cosh \chi \sin \phi \\z &= l \sin \psi \sinh \chi .\end{aligned}\tag{2}$$

Die Koordinaten durchlaufen dabei die folgenden Werte: $\chi = 0 \dots \infty, \psi = -\pi/2 \dots \pi/2, \phi = 0 \dots 2\pi$.

- Was für Koordinatenflächen ergeben sich für $\psi = \text{const}$, $\chi = \text{const}$ und $\phi = \text{const}$?
- Was für Koordinatenlinien ergeben sich für $\psi, \chi = \text{const}$; $\psi, \phi = \text{const}$; $\phi, \chi = \text{const}$?
Nutzen Sie zum Beispiel Mathematica, um sich die Koordinatenlinien anzusehen.
- Man berechne die Basisvektoren $\vec{e}_\chi, \vec{e}_\psi, \vec{e}_\phi$ und prüfe auf Orthogonalität.
- Zusatzaufgabe:** Man berechne die Geschwindigkeitskoordinaten v_χ, v_ψ und v_ϕ .
- Zusatzaufgabe:** Man gebe die Umkehrtransformation zu (2) an.