Universität Bielefeld	Theoretische Physik III	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	WS 2010/2011	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 11

11.1 Zwei identische Teilchen im Kastenpotential

Zwei identische Teilchen befinden sich in einem eindimensionalen Kastenpotential mit unendlich hohen Potentialwänden

$$V(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x \le L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \; . \tag{1}$$

a. Wie lauten die Energieeigenwerte und die Eigenfunktionen (Ortsdarstellung) für ein Teilchen im Kastenpotential?

b. Formulieren Sie den Hamiltonoperator des Zweiteilchensystems. Warum separieren die Eigenfunktionen in einen Orts- und einen Spinanteil?

c. Bei den beiden Teilchen handele es sich um Fermionen mit Spin $s = 1/2$. Welche Symmetrie muss der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch $S = 1$ beschrieben wird und welche Symmetrie muss der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch $S = 0$ beschrieben wird? Berechnen Sie für beide Fälle die möglichen Energieeigenwerte und Eigenfunktionen.

d. Bei den beiden Teilchen handele es sich nun um Bosonen mit Spin $s = 1$. Welche Symmetrie muss der Ortsanteil der Eigenfunktion haben, wenn der Spinanteil durch $S = 2, M = 2$ beschrieben wird? Berechnen Sie für diesen Fall die möglichen Energieeigenwerte und Eigenfunktionen.

11.2 Fermionen im harmonischen Oszillator

Wir betrachten N identische und ununterscheidbare Fermionen[1] in einem eindimensionalen harmonischen Oszillatorpotential. Das System soll im kanonischen Ensemble beschrieben werden.

a. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt

$$Z_N^F(T,\omega) \;=\; \sum_{n_1<n_2<\cdots<n_N} e^{-\beta\hbar\omega(n_1+n_2+\cdots+n_N+\frac{N}{2})} = e^{-\beta\hbar\omega\frac{N^2}{2}} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-n\beta\hbar\omega}} \; . \tag{2}$$

[1] Da Fermionen einen Spin besitzen, haben sie auch mehrere mögliche m_s-Zustände, die man berücksichtigen müsste. Damit man den Spin im weiteren nicht mehr zu berücksichtigen braucht, nehmen wir in diesem Beispiel an, dass alle dieselbe m_s-Quantenzahl besitzen. Man kann das zum Beispiel durch hohe Magnetfelder erreichen, dann sind die Fermionen spinpolarisiert. Ein solcher Fall wird in der Literatur witzigerweise auch „spinlose Fermionen" genannt.

b. Zeigen Sie, dass die Grundzustandsenergie $E_0(N) = \hbar\omega \frac{N^2}{2}$ ist. Begründen Sie dies evtl. mit einer Skizze.

c. Leiten Sie die innere Energie $U_N^F(T,\omega)$ her und vergleichen Sie mit der Vorlesung.

d. Leiten Sie die Wärmekapazität $C_N^F(T,\omega)$ her und vergleichen Sie mit der Vorlesung.

e. Stellen Sie die Wärmekapazität $C_N^F(T,\omega)$ für $N = 10$ als Funktion von $\beta\hbar\omega$ dar und stellen Sie zum Vergleich auch die Wärmekapazität $C_N(T,\omega)$ für 10 unterscheidbare Teilchen dar.