Aufgabenblatt 9

9.1 Freie Energie

Zeigen Sie, dass

$$F = -k_B T \ln(Z) \ , \tag{1}$$

wenn

$$\underset{\sim}{R} = \frac{1}{Z} \exp\left\{-\beta \underset{\sim}{H}\right\} \tag{2}$$

und

$$U = \mathrm{Sp}\left(\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{R}\right) \ . \tag{3}$$

9.2 Unabhängige Teilchen im Kastenpotential

Die quantenmechanische Formulierung des idealen Gases lautet wie folgt: Ein dreidimensionales unendlich tiefes Kastenpotential der Ausdehnung $L \times L \times L$ werde von N unabhängigen, d.h. nicht wechselwirkenden Teilchen bevölkert.

a. Wie lautet der Hamiltonoperator?

b. Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\underset{\sim}{H}$ an.

c. Die exakte Zustandssumme wurde in der Vorlesung behandelt. Ermitteln Sie die Zustandssumme im kanonischen Ensemble für $N = 1$ numerisch (z.B. mit Mathematica), indem Sie statt der vollständigen Spur nur die ersten, d.h. energetisch tiefsten $n_{\max}$ Eigenzustände berücksichtigen (z.B. mit $n_{\max} = 500$). Wählen Sie irgendwelche „vernünftigen“ Einheiten.

d. Berechnen Sie daraus die innere Energie und die Wärmekapazität und stellen Sie diese graphisch dar.

e. **Zusatzaufgabe:** Bilden Sie die Ableitung $\frac{\partial U}{\partial V}$. Wie groß müsste diese eigentlich für das ideale Gas sein? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

9.3 Gleichverteilungssatz

a. Wie lautet der Gleichverteilungssatz der klassischen statistischen Mechanik?

b. Wie lautet die innere Energie des klassischen idealen Gases aus N Punktteilchen in drei Raumdimensionen? Begründen Sie.

c. Wie lautet die Wärmekapazität eines Systems aus N unabhängigen klassischen harmonischen Oszillatoren? Die Kreisfrequenzen für die Schwingungen in die drei Raumdimensionen seien ω_x, ω_y und ω_z. Begründen Sie das Ergebnis.

d. Erläutern Sie, was sich ändert, wenn die Oszillatoren quantenmechanischer Natur sind. Nutzen Sie eine Skizze des funktionalen Verlaufs der Wärmekapazitäten als Funktion der Temperatur.

9.4 Klassische Maxwellverteilung: Mittlerer Betrag der Geschwindigkeit

a. Berechnen Sie Mittelwert $\langle v \rangle$ und Streuung $\sigma(v) = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$ des Betrages der Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ für die Maxwell-Verteilung eines ^{4}He-Gases bei $T = 300$ K.

b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem beliebig herausgegriffenen Atom der Geschwindigkeitsbetrag zwischen $\langle v \rangle - \sigma(v)$ und $\langle v \rangle + \sigma(v)$ liegt? Wie hängt diese Wahrscheinlichkeit von der Temperatur und den Eigenschaften des betrachteten Teilchens ab?

9.5 Klassische Maxwellverteilung: Strahlkühlung

Bei Teilchenbeschleunigern wird oft davon gesprochen, dass der Teilchenstrahl „gekühlt" sei. Man meint damit, dass die Abweichung der Teilchengeschwindigkeiten vom Mittelwert gering ist, d.h., dass der Strahl eine große Homogenität aufweist.
Überlegen Sie sich, warum man das als Temperatur ausdrücken kann. Formulieren Sie die entsprechenden Zusammenhänge.