Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik III WS 2010/2011	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 7

7.1 Anwendung des Prinzips maximaler Unbestimmtheit auf den nicht isotropen Würfel

Wir betrachten das Würfeln mit einem sechsseitigen Würfel und den üblichen Augenzahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Augenzahlen gewürfelt werden, sollen p_i genannt werden.

a. Berechnen Sie mit dem Prinzip maximaler Unbestimmtheit die Wahrscheinlichkeitsverteilung der p_i, wenn Ihnen nichts weiter bekannt ist, als oben angegeben. Wie groß ist die mittlere Augenzahl?

b. Im folgenden sei uns eine zusätzliche Information bekannt. Der Würfel ergibt eine bestimmte mittlere Augenzahl $\langle\, i \,\rangle$. Stellen Sie den zusätzlichen Lagrange-Parameter λ_1 als Funktion der mittleren Augenzahl $\langle\, i \,\rangle$ dar. Nutzen Sie dabei, dass Sie die mittlere Augenzahl durch Ableitung des Logarithmus der Zustandssumme nach dem Lagrangeparameter darstellen können, d.h. es ist sinnvoll, erst die Zustandssumme zu ermitteln und sie dann abzuleiten. Das Ergebnis ist die mittlere Augenzahl $\langle\, i \,\rangle$ als Funktion des Lagrange-Parameters λ_1. Leider kann man die Funktion nicht invertieren, aber man kann Sie z.B. mit Mathematica darstellen und punktweise invertieren lassen. Stellen Sie die gesuchte Funktion dar.

c. Die mittlere Augenzahl betrage im ersten Beispiel 3.5. Wie groß ist der Lagrange-Parameter λ_1? Interpretieren Sie das Ergebnis.

d. Im zweiten Beispiel sei die mittlere Augenzahl $\langle\, i \,\rangle = 2.8$, d.h. die verschiedenen Augenzahlen kommen offensichtlich nicht gleich oft vor. Bestimmen Sie λ_1 sowie die Wahrscheinlichkeiten p_i (vier Stellen nach dem Komma reichen).

e. Was kommt eigentlich für das in der Vorlesung behandelte Beispiel $\langle\, i \,\rangle = 4.5$ heraus?

7.2 Gaußverteilung

Zeigen Sie, dass man die Gaußverteilung als Lösung aus dem Prinzip maximaler Unbestimmtheit erhält, wenn über eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(x)$ nichts weiter bekannt ist als der Mittelwert x_0 und die mittlere quadratische Abweichung σ^2. Nutzen Sie die folgenden Definitionen.
Unbestimmtheitsmaß:

$$U \;=\; -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \rho(x)\ \ln(L\rho(x))\ , \tag{1}$$

dabei ist L eine (beliebige, aber feste) Länge, die dazu dient, das Argument des Logarithmus dimensionslos zu machen.
Mittelwert:

$$x_0 = \langle\, x \,\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x\ \rho(x)\ . \tag{2}$$

Mittlere quadratische Abweichung:

$$\sigma^2 = \langle\, (x-x_0)^2 \,\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ (x-x_0)^2\ \rho(x)\ . \tag{3}$$

7.3 Wiederholung Quantenmechanik

$\underset{\sim}{A}$ sei ein hermitescher Operator mit diskretem Spektrum.

a. Formulieren Sie die Eigenwertgleichung für $\underset{\sim}{A}$. Welche Eigenschaften haben die Eigenwerte, welche die Eigenvektoren? Beweisen Sie diese Eigenschaften.

b. Wie lautet die Spektraldarstellung von $\underset{\sim}{A}$?

c. $f(\underset{\sim}{A})$ sei eine Funktion des Operators $\underset{\sim}{A}$. Wie lauten die Eigenwerte, wie die Eigenvektoren und wie die Spektraldarstellung?

d. $|\,\phi\,\rangle$ sei ein beliebiger Zustandsvektor des Hilbertraumes. Wie lautet der Erwartungswert von $\underset{\sim}{A}$ bezüglich $|\,\phi\,\rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten messe ich die Eigenwerte von $\underset{\sim}{A}$, wenn das System vor der Messung im Zustand $|\,\phi\,\rangle$ präpariert ist? Überprüfen Sie, ob die Wahrscheinlichkeiten sich insgesamt zu Eins addieren.