Aufgabenblatt 12

12.1 Shift-Register-Generator

Untersuchen Sie den in der Vorlesung „erfundenen“ Shift-Register-Generator. Er war für Bits x_k wie folgt definiert:

$$x_k \;=\; x_{k-p}\; XOR\; x_{k-p+q}\ , \tag{1}$$

mit $p = 10$ und $q = 3$. Die Anfangswerte waren

$$x_1, \ldots, x_{10} \;=\; 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\ . \tag{2}$$

a. Schreiben Sie ein Programm in einer Hochsprache Ihrer Wahl (C, Fortran), das weitere Bits entsprechend der Regel (1) generiert. Bei C können Sie dazu den Operator $\wedge$ verwenden, der für zwei Integer bitweise eine XOR-Operation durchführt. Dazu ist es natürlich günstig, jedes Bit durch einen Integer zu repräsentieren.

b. Dieser Generator hat eine Periode, die nicht sehr groß ist. Finden Sie diese heraus.

c. Generieren Sie aus diesen Bits zuerst natürliche Zahlen I_k von 10 Bit Länge und anschließend rationale Zahlen R_k:

$$I_k \;=\; \sum_{i=0}^{9} x_{k-i} 2^i\ , \quad k \geq 10\ ; \tag{3}$$

$$R_k \;=\; \frac{I_k}{2^{10}}\ . \tag{4}$$

Welchen Wertebereich haben die erzeugten rationalen Zufallszahlen R_k?

Tragen Sie die rationalen Zufallszahlen als Paare in zwei Dimensionen graphisch auf. Lassen sich mit dem bloßen Auge Korrelationen erkennen?

d. Erzeugen Sie zum Vergleich Zufallszahlen mit einem professionellen Zufallszahlengenerator, wie z.B. dem „Mersenne-Twister“, und tragen Sie auch diese zum Vergleich in zwei Dimensionen graphisch auf.

Der Source-Code für den Generator befindet sich in der Datei `mt199937ar.c`. Dieser entspricht der auf der Homepage der Erfinder (Matsumoto und Nishimura) frei verfügbaren Version.

12.2 Monte-Carlo-Integration

a. Berechnen Sie das Integral der Funktion $\exp(x)$ in den Grenzen von 0 bis 1 mit der Mittelwertmethode. Wählen Sie zunächst eine feste Anzahl von MC-Iterationen. Wiederholen Sie bei dieser Anzahl Ihre MC-Integration viele Male und sehen Sie sich die Streuung der Ergebnisse (einer einzelnen MC-Integration) in einem Histogramm an. Wiederholen Sie anschließend diesen Versuch mit einer höheren Anzahl von MC-Iterationen pro MC-Integration. Wie hängt die Streuungsbreite von der Zahl der Monte-Carlo-Iterationen ab?

b. Berechnen Sie das eindimensionale Integral

$$\int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1 - x + xe^x} \mathrm{d}x \tag{5}$$

mit der Mittelwertmethode, einmal mit und einmal ohne Importance-Sampling. Vergleichen Sie wie zuvor die Ergebnisse für verschiedene Anzahlen von MC-Iterationen mit Hilfe entsprechender Histogramme. Für genaue Analysen der Histogramme können Sie versuchen, an diese Gaußsche Normalverteilungen anzufitten.