| Universität Bielefeld<br>Fakultät für Physik | Theoretische Physik I<br>WS 2009/2010 | Prof. Dr. Jürgen Schnack<br>jschnack@uni-bielefeld.de |
|---|---|---|



# Aufgabenblatt 13

## 13.1 Elektrischer Dipol

Laut Vorlesung ist die Energiestromdichte (Poynting-Vektor) eines elektrischen Dipols im Fernfeld dem Betrage nach

$$S_p(\vec{r},t) \quad = \quad \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c r^2} \ddot{p}^2(t - r/c)\, \sin^2\vartheta \; . \tag{1}$$

a. Berechnen Sie den mittleren Energiestrom. Integrieren Sie dazu über eine beliebige Kugeloberfläche und mitteln Sie über eine Schwingungsdauer. Nehmen Sie dazu an, dass

$$p(t - r/c) \quad = \quad p_0 \sin(\omega(t - r/c)) \; . \tag{2}$$

b. Lesen Sie den beigefügten Text über die Streuung von Licht aus dem Buch von Walter Greiner. Beachten Sie dabei, dass in dem Buch das *cgs*-System verwendet wird. Warum finden wir Himmelsblau und Abendrot eigentlich überhaupt verwunderlich?

## 13.2 Polarisierte Wellen

Eine zirkular polarisierte monochromatische Welle werde durch das Feld

$$\vec{E}(\vec{r},t) \quad = \quad E \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \; . \tag{3}$$

a. Berechnen Sie die zugehörige magnetische Induktion (im Vakuum).

b. Das zirkular polarisierte Licht (in diesem Fall E-Feld) kann man sich aus zwei linear polarisierten Anteilen zusammengesetzt denken. Welche sind das (z.B.) in diesem Fall?

c. Ein Polarisator (Polarisationsfilter) läßt nur Licht einer bestimmten linearen Polarisation durch. So kann ein $x$-Polarisator nur von in $x$-Richtung polarisiertem Licht passiert werden. Welcher Anteil des $\vec{E}$-Feldes (3) passiert einen $x$-Polarisator? Auf welchen Wert sinkt die Intensität ab?

d. Nachdem das Licht einen $x$-Polarisator passiert hat, enthält es keinen Anteil in $y$-Richtung mehr. Man könnte das überprüfen, indem man das Licht auf einen $y$-Polarisator fallen läßt. Was aber passiert, wenn man das Licht, das den $x$-Polarisator passiert hat, erst auf einen unter 45° in der $x-y$–Ebene gedrehten Polarisator fallen läßt und dann auf einen $y$-Polarisator? Erklären Sie!

Der Maximalwert liegt bei $\omega' = 0$ und hat den Betrag $\frac{|x_0|^2}{8\pi\gamma^2}$ ; der halbe Maximalwert liegt bei $\omega' = \pm\gamma$. Die Halbwertsbreite der Resonanz (kurz: Breite der Resonanz) beträgt daher

$$\Delta\omega = 2\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3} \quad . \qquad \underline{14}$$

Sie charakterisiert die Frequenzverteilung in der Bewegung $\underline{6}$. Unsere Ergebnisse können wir nun so zusammen fassen: Im allgemeinen enthält eine Funktion der Zeit, die für $t < 0$ verschwindet und für $t > 0$ von der Form $e^{-\gamma t}cos(\omega_0 t + \varphi)$ ist, wobei schwache Dämpfung ($\gamma \ll \omega_0$) angenommen wird, eine ganze Menge von Fourierfrequenzen (Frequenzband). Die Verteilung der Frequenzen hat eine Resonanz bei $\omega = \omega_0$ und eine Breite $\Delta\omega = 2\gamma$. In der Quantenmechanik werden wir sehen, daß dieses Resultat als die Unschärferelation zwischen Energie und Zeit $\Delta E \Delta t \approx \hbar/2$ gedeutet werden kann.

## 21.8 Aufgabe: Streuung von Licht durch polarisierbares Molekül

Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Licht durch ein polarisierbares Molekül. Wie hängt der Streuquerschnitt von der Wellenlänge $\lambda$ und der Polarisierbarkeit $\alpha$ ab?

**Lösung:**

Das im Molekül durch das elektrische Feld $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ des Lichtes induzierte Dipolmoment beträgt

$$\vec{p}(t) = \alpha\vec{E}(t) = \alpha\vec{E}_0 e^{-i\omega t} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \; . \qquad \underline{1}$$

Dabei ist $\vec{p}_0 = \alpha\vec{E}_0$ die komplexe Amplitude des Dipolmomentes. Der Energiefluß des auf das Molekül einfallenden Lichtes beträgt $\frac{cE_0^2}{8\pi}$ und die gestreute Energie pro Zeiteinheit (vgl. Gleichung (21.16a)) ist $\frac{1}{3}ck^4p_0^2$. Demnach ist der Streuquerschnitt $\sigma$ (= gestreute Energie pro Zeiteinheit/einfallender Energiefluß) gegeben durch

$$\sigma = \frac{\frac{c}{3}k^4p_0^2}{\frac{c}{8\pi}E_0^2} = \frac{8\pi}{3}k^4\alpha^2 = \frac{4(2\pi)^5}{3}\frac{\alpha^2}{\lambda^4} \, . \qquad \underline{2}$$

Dieser Streuquerschnitt wurde zum ersten Mal von Lord Rayleigh* hergeleitet. Er erklärt die Bläue des Himmels und die Röte bei Sonnenauf- und untergang. Um das etwas besser zu verstehen, bemerken wir zunächst, daß die Polarisierbarkeit des Stickstoffmoleküls (Hauptbestandteil der Luft) etwa gleich der einer leitenden Kugel vom Radius 1.2 Å $= 1,2 \cdot 10^{-8}$cm angesehen werden kann. Letztere haben wir in Beispiel 6.2 berechnet und (vgl. Gleichung $\underline{12}$ dieses Beispiels im Limes $\epsilon \to \infty$)

$$\alpha = a^3 = 1,7 \cdot 10^{-24}\mathrm{cm}^3 \, . \qquad \underline{3}$$

gefunden. Rotes Licht hat Wellenlänge von der Größenordnung

$$\lambda_{\mathrm{rot}}' \approx 6500\text{Å} = 6,5 \cdot 10^{-5}\mathrm{cm} \quad . \qquad \underline{4}$$

Der Streuquerschnitt $\underline{2}$ ist dann

$$\sigma_{\mathrm{rot}} = \frac{4(2\pi)^5}{3}\frac{(1,7 \cdot 10^{-24})^2}{(6,5 \cdot 10^{-5})^4}\mathrm{cm}^2 = 2.1 \cdot 10^{-27}\mathrm{cm}^2 \, . \qquad \underline{5}$$

Unter normalen atmosphärischen Bedingungen auf Meereshöhe beträgt die Anzahl der Moleküle pro Kubikzentimeter

$$n = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22.4\ \mathrm{Liter}} = 2.7 \cdot 10^{19}\mathrm{cm}^{-3} \, . \qquad \underline{6}$$

Daher finden wir für die *mittlere freie Weglänge* des roten Lichtes (d.h. den mittleren Weg, den es ohne Streuung zurücklegt)

$$L_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{n\sigma} = \frac{\mathrm{cm}^3}{2.7 \cdot 10^{19}}\frac{1}{2.1 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{cm}^2} = 1.8 \cdot 10^7\ \mathrm{cm} = 180\ \mathrm{km} \, . \qquad \underline{7}$$

Blaues Licht liegt im Wellenlängenbereich um

$$\lambda_{\mathrm{blau}} \approx 4700\ \text{Å} = 4.7 \cdot 10^{-5}\mathrm{cm} \qquad \underline{8}$$

und die mittlere freie Weglänge beträgt in diesem Fall

$$L_{\mathrm{blau}} = 180\ \mathrm{km}\left(\frac{4700}{6500}\right)^4 = 49\ \mathrm{km} \, . \qquad \underline{9}$$

Der Himmel ist blau, weil das direkt von der Sonne kommende Licht gestreut wird, sobald es in die Atmosphäre kommt. Die kleine mittlere freie Weglänge des blauen Lichtes gegenüber dem roten zeigt an, daß dieser Streuprozeß für das blaue Licht viel effektiver ist als für das rote.

Die Röte bei Sonnenunter- und aufgang erklärt sich ähnlich: Das Licht muß jetzt einen größeren Weg durch die Atmosphäre (vor allem durch die dichten Zonen) zurücklegen. Wie die freien Weglängen zeigen, wird das blaue Licht viel kräftiger weggestreut als das rote. Das rote bleibt sozusagen übrig.

Diese Abschätzungen vermitteln das Grundsätzliche an dem Vorgang der Lichtstreuung in der Atmosphäre. Es sei aber angemerkt, daß statistische Fluktuationen und Verunreinigungen der Luft (Dunst, Staub) auch eine Rolle dabei spielen.

*John William Strutt *Rayleigh*, Lord, englischer Physiker, geb. 12. Nov. 1842, studierte in Cambridge und wurde 1868 Master of Arts; 1876 - 84 wirkte er als Professor für Experimentalphysik in Cambridge und wurde 1887 Professor für mathematische Physik am königlichen Institut zu London. 1895 entdeckte er zusammen mit William Ramsay das Argon. 1904 erhielt er den Nobelpreis für Physik. 1873 war er seinem Vater in die Pairswürde gefolgt. Außer zahlreichen Abhandlungen über Gegenstände der Akustik, Optik und Elektrizitätslehre, die meist in den "Philosophical Transactions" der Royal Society erschienen, schrieb er als Hauptwerk: "Theory of Sound" (2 Bde, London 1877 - 78) "Scientific Papers" erschienen 1900 - 03 in London. (Bde 1 - 4, von 1869 - 1901 reichend)