Weihnachtszettel 11

Ich wünsche Ihnen eine frohe Weihnacht und ein gesegnetes Neues Jahr.

11.1 Prüfungsvorbereitung

Sie sollten in dieser Vorlesung ein grundlegendes Verständnis zu den folgenden Punkten erlangt haben.

a. Newtonsche Beschreibung der Mechanik, d.h. Axiome, Bewegungsgleichungen;

b. Lagrangesche Beschreibung der Mechanik, Lagrange-Funktion, Euler-Lagrange-Gleichungen, Zwangsbedingungen, Erhaltungsgrößen;

c. Hamiltonsche Beschreibung, Hamilton-Funktion, Hamiltonsche Bewegungsgleichungen, Poissonklammern;

d. einfache Beispiele in allen drei Beschreibungen, z.B. freier Fall;

e. einfache Probleme mit Zwangsbedingungen, z.B. Perle auf Halbkreis usw.;

f. Maxwell-Gleichungen, integrale Formulierung, Integralsätze;

g. Elektrostatik und einfache Anwendungen, Punktladung, Dipol;

h. Magnetostatik und einfache Anwendungen, Biot-Savart, Leiterschleife, unendlicher Leiter;

i. Felder im Vakuum (kommt ab Januar).

11.2 Rückläufigkeit der Planeten im geozentrischen Bezugssystem

Man nehme vereinfachend an, daß die Erde sowie ein äußerer Planet in ein und derselben Ebene gleichsinnige gleichförmige Kreisbewegungen mit den Radien r_E beziehungsweise r_P und Winkelgeschwindigkeiten ω_E bzw. ω_P ausführen. Diese Bewegungen kann man durch entsprechende zeitabhängige komplexe Zahlen $z_E(t)$ und $z_P(t)$ beschreiben.
Man mache die sogenannte „kopernikanische Wende“ rückgängig, indem man die Erde als Bezugspunkt wählt, so daß die Planetenbewegung durch den geozentrischen Zeiger

$$z(t) = z_P(t) - z_E(t) \tag{1}$$

als einfache Epizykelbewegung dargestellt wird.

a. Zur Wiederholung mache man sich klar, wie die komplexen Zahlen mit den kartesischen Koordinaten bzw. den Polarkoordinaten der Ebene zusammenhängen.

b. Man berechne die geozentrische Winkelgeschwingigkeit des Planeten als Funktion der Zeit.

c. Man gebe insbesondere die extremalen Werte dafür an.

d. Man beweise mit Hilfe des dritten Keplergesetzes, daß der Planet rückläufig wird.

Literatur

Greiner, Band I, S. 266-288; Landau/Lifschitz, Band I, S. 42-48

11.3 Lagrangefunktion und Hamiltonfunktion

Es sei für einen Massenpunkt die Lagrangefunktion

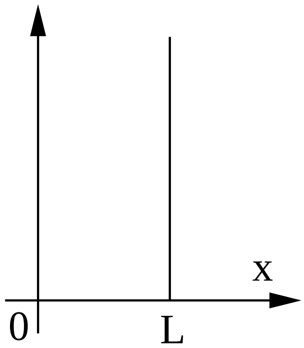
$$L = \frac{m}{2}\,\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r},t) + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{V}(\vec{r},t) \tag{2}$$

durch das skalare Feld U und das Vektorfeld $\vec{V}$ gegeben.

a. Man gebe die auf den Massenpunkt wirkende Kraft $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r},t)$ an und zeige dabei, daß für $\vec{f}$ nicht $\vec{V}$ selber, sondern $\dot{\vec{V}}$ und $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{V}$ benötigt werden.

b. Man gebe die Hamiltonfunktion an.

11.4 Bohr-Sommerfeld-Quantisierung der Bewegung im Kastenpotential



Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem unendlich hohen eindimensionalen Kastenpotential der Ausdehnung L.

a. Stellen Sie die Bewegung für zwei verschiedene Energien E_1 und $E_2 = 4E_1$ im Phasenraumdiagramm dar.

b. Berechnen Sie die Wirkung

$$S \quad = \quad \oint \mathrm{d}x\, p \tag{3}$$

für eine Periode in Abhängigkeit von der Energie E. Nehmen Sie an, dass die Integrationskonstante Null ist.

c. Nach der Quantisierungsregel von Bohr und Sommerfeld sind die Energieeigenwerte E_n des Systems, d.h. die Energien, die bei Messungen als Resultat auftreten, durch die folgende Bedingung gegeben:

$$S(E_n) \quad = \quad nh\,, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Dabei ist h das Plancksche Wirkungsquantum. Berechnen Sie die möglichen Energieeigenwerte.

d. Stellen Sie die Energieeigenwerte als

$$E_n \quad = \quad \frac{p_n^2}{2m} \tag{5}$$

dar. Wie hängen die möglichen Impulse p_n von L ab?

11.5 Coulombkraft, relaxierende Bildladung

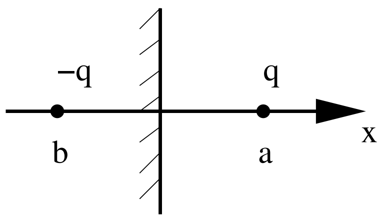
Im dreidimensionalen Raum (kart. Koordinaten x, y, z) sei der Halbraum $x \leq 0$ metallisch, der Halbraum $x > 0$ sei Vakuum. Eine Punktladung bei $a > 0$ auf der x-Achse influenziere auf der Grenzfläche eine Ladungsverteilung, die für $x > 0$ dasselbe elektrische Feld erzeugt wie eine Punktladung $-q$ bei $b < 0$ auf der x-Achse. a und b können zeitabhängig sein, und es gelte die Relaxatorgleichung mit einer Zeitkonstanten τ:

$$\dot{b}(t) \quad = \quad -\frac{1}{\tau}\left(b(t) + a(t)\right) \; . \tag{6}$$

a. Es sei $a(t) = a_0 + \alpha \sin(\omega t)$ als erzwungene Schwingung vorgegeben. Man gebe dazu die eingeschwungene Antwort $b(t)$ für $t \to \infty$ an.

b. Mit diesem Ergebnis entwickle man die Coulombkraft zwischen q und $-q$ bis zur ersten Ordnung in α/a_0.

c. Welche Energie wird dann bei einem Schwingungszyklus der Punktladung q durch die Coulombwechselwirkung übertragen?



Literatur: Jackson, Klassische Elektrodynamik, Abschnitt 2.1

11.6 Rotierende Hohlkugel

Auf der Oberfläche einer Hohlkugel mit dem Radius R sei eine Ladung Q gleichmäßig verteilt. Die Kugel rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine beliebige, aber feste Achse.

a. Bestimmen Sie die durch die Rotation verursachte Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$. Stellen Sie dazu zuerst die Ladungsdichte mit Hilfe der Delta-Funktion dar.

b. Berechnen Sie das von $\vec{j}(\vec{r})$ hervorgerufene magnetische Moment der Kugel. Verwenden Sie die Beziehung

$$\vec{m} \quad = \quad \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \; \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \; . \tag{7}$$

c. Leiten Sie die Komponenten des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ ab. Unterscheiden Sie dabei zwischen Innen- und Außenraum der Kugel.

d. Zeigen Sie, dass die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ im Außenraum die eines magnetischen Dipols ist.