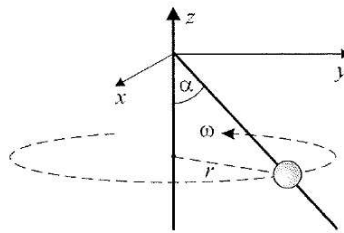


Aufgabenblatt 8

8.1 Rutschende Perle auf einem rotierenden Draht

Eine Perle bewegt sich reibungsfrei auf einem geneigten Draht, der sich um eine vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht.



- Stellen Sie die Lagrangegleichungen erster Art in Zylinderkoordinaten r , ϕ und z auf. Wieviele Zwangsbedingungen erhalten Sie in diesen Koordinaten?
- Lösen Sie die Differentialgleichungen und bestimmen Sie die Zwangskräfte.
- Stellen Sie die Gesamtenergie der Perle dar und zeigen Sie, dass der Zuwachs durch die von der Zwangskraft verrichteten Arbeit stammt.
- Warum leisten die restlichen Zwangskräfte keine Arbeit?

8.2 Lösung des harmonischen Oszillators mittels Poisson-Klammern

Die Poisson-Klammern zweier klassischer Observabler sind wie folgt definiert

$$[f, g] \equiv \{f, g\} := \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (1)$$

Dabei sind q_i die generalisierten Koordinaten und p_i die generalisierten Impulse.

Mit Hilfe der Poisson-Klammern kann man die Zeitentwicklung des harmonischen Oszillators bestimmen. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

- Stellen Sie die Hamilton-Funktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit der Frequenz ω auf.
- Stellen Sie zum Vergleich erst einmal die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.
- Nehmen Sie nun an, Sie kennen die Funktion $x(t)$. Entwickeln Sie diese Funktion in eine Taylor-Reihe und bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten über Poisson-Klammern mit der Hamiltonfunktion.
- Führen Sie die gleiche Prozedur für $p(t)$ durch.
- Vereinfachen Sie die entstandenen Reihen.
- Stellen Sie die Phasenraumkurve dar, die sich ergibt, wenn der Oszillator die Energie E hat. Kann man die Darstellung durch geschickte Koordinatenwahl vereinfachen?

8.3 Hamilton-Funktion und klassische Zustandssumme

Die Hamilton-Funktion eines klassischen Systems ist der Ausgangspunkt zur Berechnung der statistischen Eigenschaften dieses Systems im thermodynamischen Gleichgewicht. Dabei lautet die kanonische Zustandssumme für ein System, das mittels einer Koordinate und eines Impulses beschrieben wird

$$Z(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dp dq \exp \{-\beta H(p, q)\} . \quad (2)$$

Für höherdimensionale Systeme muss das Integral entsprechend erweitert werden. $\beta = 1/(k_B T)$ ist die inverse Temperatur.

Die innere Energie und andere statistische Mittel berechnen sich dann wie folgt

$$U(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} dp dq H(p, q) \exp \{-\beta H(p, q)\} . \quad (3)$$

- a. Stellen Sie die Hamilton-Funktion für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator der Frequenz ω auf. Bestimmen Sie für diesen Oszillator die Zustandssumme, die innere Energie und die Wärmekapazität $C = \partial U / \partial T$.
- b. Erinnern Sie sich an den Gleichverteilungssatz? Was sagt der Gleichverteilungssatz aus? Vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis.
- c. **Zusatzaufgabe:** Nehmen Sie jetzt an, daß das Potential nicht quadratisch in x ist, sondern proportional zu x^4 . Bestimmen Sie Zustandssumme, innere Energie und Wärmekapazität für diesen Fall.