

Aufgabenblatt 4

4.1 Auftrieb, Gaußscher Satz

Ein starrer Körper sei in einer inkompressiblen Flüssigkeit ganz oder teilweise untergetaucht. Mit Ω werde der untergetauchte Bereich (bzw. der Bereich der verdrängten Flüssigkeit) und mit $\partial\Omega$ die umschließende Oberfläche bezeichnet. Die Flüssigkeit hat die konstante Dichte ρ , und infolge der Schwerkraft herrscht in ihr der hydrostatische Druck

$$p_h = -\rho g z \quad (1)$$

mit $-z$ als Eintauchtiefe. Demzufolge wirkt auf ein Flächenelement $d\vec{A}$ des eingetauchten Körpers die Auftriebskraft

$$-\vec{e}_z \cdot p_h d\vec{A} \quad (2)$$

und insgesamt der Auftrieb

$$F_{\text{Auftrieb}} = - \int_{\partial\Omega} \vec{e}_z \cdot p_h d\vec{A} . \quad (3)$$

a. Man beweise, daß

$$F_{\text{Auftrieb}} = Mg \quad (4)$$

mit M als Gesamtmasse der verdrängten Flüssigkeit.

b. Man berechne die Querkraft \vec{F}_{Quer}

$$\vec{F}_{\text{Quer}} = -\vec{e}_x \int_{\partial\Omega} \vec{e}_x \cdot p_h d\vec{A} - \vec{e}_y \int_{\partial\Omega} \vec{e}_y \cdot p_h d\vec{A} . \quad (5)$$

4.2 Linearer harmonischer Oszillator

Wir diskutieren die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t \quad (6)$$

des linearen harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (7)$$

- Wie hängen die Parameter A und B mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}_0 = v_0$ zusammen?
- Zu welchen Zeiten t_1 erreicht der Oszillator seinen Maximalausschlag x_{\max} ? Wie groß ist x_{\max} ? Welchen Wert hat die Beschleunigung zur Zeit t_1 ?
- Zu welchen Zeiten t_2 erreicht der Oszillator seine Maximalgeschwindigkeit \dot{x}_{\max} ? Wie groß ist \dot{x}_{\max} ? Wie groß ist die Auslenkung zur Zeit t_2 ? Welche einfache Beziehung besteht zwischen x_{\max} und \dot{x}_{\max} ?
- Zu welchen Zeiten t_3 erfährt der Oszillator die maximale Beschleunigung \ddot{x}_{\max} ? Wie groß ist diese? Welche Werte haben die Auslenkung und die Geschwindigkeit zur Zeit t_3 ?

4.3 Ballonflug im Alpenvorland



Ein Heißluftballonfahrer benutzt einen Ballon in Form einer großen Milchkuh mit einem Volumen von $V_{\text{Ballon}} = 5000\text{m}^3$. Er schwebt in der neutral geschichteten Troposphäre. Neutrale Schichtung bedeutet, daß die Dichte ρ und die Temperatur T wie folgt von der Höhe z über dem Erdboden abhängen:

$$T(z) = T_0 (1 - z/L) \quad (8)$$

$$\rho(z) = \rho_0 (1 - z/L)^{2.5}, \text{ mit } \rho_0 = \frac{m p_0}{\kappa T_0} \quad (9)$$

und $L = 29.83$ km. Dabei ist $\kappa \approx 1.3805 \cdot 10^{-23}$ J/K die Boltzmannkonstante und $m = 28.84/(6.023 \cdot 10^{26})\text{kg}$ die mittlere Masse eines Luftmoleküls. Ballonhülle und Fracht haben zusammen die Masse $M_{\text{Last}} = 500$ kg. Es sei $p_0 = 1000$ Hektopascal und $T_0 = 290$ K.

In welcher Höhe z_0 schwebt der Ballon, wenn die Ballontemperatur auf 10% über der Umgebungstemperatur gehalten wird? Käme man über die Alpen?

Anleitung: z_0 werde als mittlere z -Koordinate des Ballons gemäß

$$\rho(z_0) =: \frac{1}{V_{\text{Ballon}}} \int_{\text{Ballon}} dV_{\vec{r}} \rho(z) \quad (10)$$

definiert. Auf ein nach außen gerichtetes Flächenelement $d\vec{A}_{\vec{r}}$ der Ballonhülle wirkt die Kraft $-p(z)d\vec{A}_{\vec{r}}$, die durch den Luftdruck $p = p(z)$ verursacht wird. Die resultierende Gesamtkraft kann man durch z_0 ausdrücken, wenn man den Gaußschen Satz und die hydrostatische Grundgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (11)$$

mit $g = \text{const}$ benutzt. Diese resultierende Kraft ist dem Gesamtgewicht von Ballonhülle, Gasinhalt und Fracht – also

$$-g \left(M_{\text{Last}} + \int dV_{\vec{r}} \rho_{\text{Ballon}} \right) \cdot \vec{e}_z \quad (12)$$

gleichzusetzen. Man kann die ideale Gasgleichung

$$\rho_{\text{Ballon}} = \frac{m p(z)}{\kappa T_{\text{Ballon}}} = \rho(z) \frac{T(z)}{T_{\text{Ballon}}} \quad (13)$$

verwenden. Mit (9) hat man dann die Bestimmungsgleichung für z_0 .