Universität Bielefeld	Theoretische Physik I	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	WS 2009/2010	jschnack@uni-bielefeld.de

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

1 Wissen

1.1 Mechanik (20 P.)

a. Wie lauten die Newtonschen Axiome (6 P.)?

b. Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen erster Art (1 P.)?

c. Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen zweiter Art (1 P.)?

d. Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (2 P.)?

e. Geben Sie die Lagrange-Funktion und die Hamilton-Funktion sowie die zugehörigen Bewegungsgleichungen eines eindimensionalen harmonischen Oszillators an. Wie lauten die Lösungen (5 P.)?

f. Was ist eine zyklische Koordinate? Geben Sie die Lagrange-Funktion eines wechselwirkenden Zweikörpersystems an, bei dem das Wechselwirkungspotential nur vom Betrag des Relativabstandes abhängt. Wieviele zyklische Koordinaten gibt es? Gibt es noch weitere Erhaltungsgrößen (5 P.)?

1.2 Elektrodynamik (25 P.)

a. Geben Sie die vier Maxwell-Gleichungen an (4 P.).

b. Wie hängen $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ vom Vektorpotential $\vec{A}$ und vom skalaren Potential ϕ ab (5 P.)?

c. Eichtransformationen sind Transformationen von $\vec{A}$ und ϕ unter denen sich $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht ändern. Die magnetische Induktion $\vec{B}$ bleibt offensichtlich erhalten, wenn man zum Vektorpotential den Gradienten eines skalaren Feldes $\chi(\vec{r},t)$ hinzufügt. Wie muß gleichzeitig das skalare Potential transformiert werden, damit auch $\vec{E}$ invariant bleibt (6 P.)?

d. Elektrostatik: Leiten Sie die elektrostatische Feldstärke $\vec{E}$ einer Punktladung q aus der ersten Maxwell-Gleichung ab (5 P.).

e. Magnetostatik: Wie ergibt sich das Vektorpotential aus der Stromdichte ($\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{A} = 0$)? Leiten Sie daraus das Biot-Savart-Gesetz für einen dünnen Leiter, durch den ein Strom der Stärke I fließt, her (5 P.).

2 Können

2.1 Massen an einer Rolle (10 P.)

Zwei Massen m_1 und m_2 ($m_1 < m_2$), die über einen Faden der Länge L miteinander verbunden sind und auf den beiden Seiten einer Rolle herabhängen, seien der Schwerkraft ausgesetzt.

a. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für m_1 und m_2 (3 P.)?

b. Berechnen Sie die Beschleunigungen der beiden Massen als Funktion von m_1 und m_2 (3 P.).

c. Wie groß ist die Fadenspannung (4 P.)?

2.2 Auftrieb, Gaußscher Satz (10 P.)

Ein starrer Körper sei in einer inkompressiben Flüssigkeit ganz oder teilweise untergetaucht. Mit Ω werde der untergetauchte Bereich (bzw. der Bereich der verdrängten Flüssigkeit) und mit $\partial\Omega$ die umschließende Oberfläche bezeichnet. Die Flüssigkeit hat die konstante Dichte ρ, und infolge der Schwerkraft herrscht in ihr der hydrostatische Druck

$$p_h = -\rho\, g\, z \tag{1}$$

mit $-z$ als Eintauchtiefe. Demzufolge wirkt auf ein Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$ des eingetauchten Körpers die Auftriebskraft

$$-\vec{e}_z \cdot p_h\, \mathrm{d}\vec{A} \tag{2}$$

und insgesamt der Auftrieb

$$F_{\text{Auftrieb}} = -\int_{\partial\Omega} \vec{e}_z \cdot p_h\, \mathrm{d}\vec{A}\ . \tag{3}$$

Man beweise, daß

$$F_{\text{Auftrieb}} = Mg \tag{4}$$

mit M als Gesamtmasse der verdrängten Flüssigkeit.

2.3 Ringbahn (20 P.)

Eine Perle der Masse m bewege sich reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft, $\vec{g} = g\vec{e}_y$, auf einer kreisförmigen Bahn.

a. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf. Verwenden Sie dazu eine geeignete verallgemeinerte Koordinate. Machen Sie eine Skizze (8 P.).

b. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung auf und leiten Sie die Bewegungsgleichung für die verallgemeinerte Koordinate her (6 P.).

c. Die Perle ruhe zur Zeit $t = 0$ auf halber Höhe (z.B. auf 9 Uhr). Leiten Sie die Formel her, mit der die Zeit berechnet werden könnte, in der die Perle den unteren Halbkreis durchläuft (6 P.).

2.4 Kraft zweier paralleler Drähte (10 P.)

Leiten Sie ausgehend von den Ihnen bekannten Gesetzen der Elektrodynamik die Kraft ab, die zwei parallele und unendlich lange Drähte aufeinander ausüben. Die Drähte sollen den Abstand a haben. Da sie unendlich lang sind, muss die Kraft als Kraft pro Längeneinheit angegeben werden.

3 Weiterdenken

3.1 Lösung des harmonischen Oszillators mittels Poisson-Klammern (15 P.)

Die Poisson-Klammern zweier klassischer Observabler sind wie folgt definiert

$$[f,g] \equiv \{f,g\} \quad := \quad \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) . \tag{5}$$

Dabei sind q_i die generalisierten Koordinaten und p_i die generalisierten Impulse.
Mit Hilfe der Poisson-Klammern kann man die Zeitentwicklung des harmonischen Oszillators bestimmen. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

a. Stellen Sie die Hamilton-Funktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit der Frequenz ω sowie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf (5 P.).

b. Nehmen Sie nun an, Sie kennten die Funktion $q(t)$. Entwickeln Sie diese Funktion in eine Taylor-Reihe und bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten über Poisson-Klammern mit der Hamiltonfunktion. Vereinfachen Sie die entstandene Reihe (10 P.).

3.2 Homogen geladene Kugel (20 P.)

Eine Kugel vom Radius R sei homogen geladen, die Gesamtladung betrage Q. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass der Ursprung im Mittelpunkt der Kugel liegt.

a. Berechnen Sie das elektrostatische Potential der Kugel. Stellen Sie die radiale Abhängigkeit graphisch dar (10 P.).

b. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke und stellen Sie deren Betrag als Funktion des Abstandes graphisch dar (10 P.).

Sie können es auch anders herum machen.

Es können 130 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.3$
- $71 \leq P \leq 73 \Rightarrow 3.0$
- $74 \leq P \leq 76 \Rightarrow 2.7$
- $77 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$